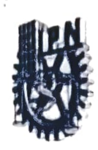
Univerciolad Nacional Autona de Mexico
Departamento de física

INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL



C. E. C. y T. MIGUEL OTHON DE MENDIZABAL



CÁLCULO INTEGRAL

Nombre del alumno: Cervantes Alvarez Alejandro.

Grupo: ______ Boleta: ______ Turno: Matutino

Nombre del Profesor: Cervantes Alvarez Alejandro

Folio:

EDICIÓN 2011

PROGRAMA DE ESTUDIOS

COMPETENCIA GENERAL DE LA UNIDAD DE APRENDIZAJE:
Resuelve problemas con integrales de una variable, mediante el teorema fundamental del cálculo y los métodos de integración en su entorno académico, social y global.

UNIDAD DIDACTICA 1. *INTEGRAL INDEFINIDA.*

Competencia particular.
Resuelve integrales indefinidas mediante el concepto de la derivada y transformaciones algebraicas (cambio de variable, potencias trigonométricas,...) en su entorno académico.

RAP1
Obtiene la antiderivada de funciones con una variable real, en su entrono académico.

RAP2
Resuelve integrales inmediatas mediante el uso del formulario, en su entorno académico.

RAP3
Resuelve integrales reducibles a inmediatas, a través de transformaciones algebraicas, en su entorno académico.

UNIDAD DIDACTICA 2. *MÉTODOS DE INTEGRACIÓN.*

Competencia particular.
Resuelve integrales empleando los métodos de integración (por partes, sustitución trigonométrica, fracciones parciales), en su entorno académico.

RAP1
Resuelve integrales por el método de integración por partes, en su entorno académico.

RAP2
Resuelve integrales por el método de sustitución trigonométrica, en su entorno académico.

RAP3
Resuelve integrales por el método de fracciones parciales, en su entorno académico.

UNIDAD DIDACTICA 3. *INTEGRAL INDEFINIDA.*

Competencia particular.
Resuelve problemas de la integral definida (área bajo la curva,...) en su entorno academi9so, social y global.

RAP1
Establece el teorema fundamental del cálculo con base en los problemas que dieron origen al cálculo integral, en su entorno académico.

RAP2
Resuelve problemas geométricos a través del teorema fundamental del cálculo , en su entorno académico.

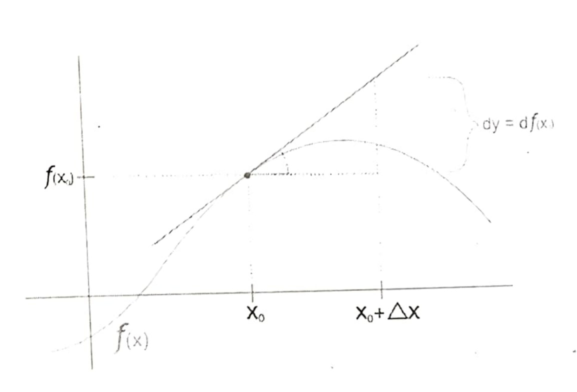
RAP3
Resuelve problemas que involucren a la integral definida, en su entorno social y global.

BIBLIOGRAFÍA.

- Purcell, Edwin. Cálculo diferencial e Integral. Prentice hall.
- Larson. Cálculo Diferencial e Integral. Mc. Graw Hill.
- Leithold. El Cálculo. 7 ed. Oxford.
- Stewart, James. Cálculo conceptos y contextos. Thomson.
- Ayres, Frank. Cálculo Diferencial e Integral. Mc. Graw Hill.

LA DIFERENCIAL DE UNA FUNCIÓN

Para calcular la diferencial de una función, se deriva la función y una vez simplificado el resultado se sustituye en la expresión: $df(x) = f'(x)dx$; de acuerdo con los valores específicos de $x = x_0$ y del cambio (incremento o decremento) de la variable independiente $(\Delta x \text{ ó } dx)$ realizado a partir de x_0, la diferencial representa el valor aproximado del cambio real, (Δy) que en consecuencia se obtiene en la variable dependiente. Esta aproximación se hace con la recta tangente a la grafica de la función en el punto cuya abscisa es x_0 y mejora en la medida que el incremento de la variable independiente se aproxima a cero.



Definición:

De acuerdo con la siguiente figura, geométricamente es la longitud del segmento $df(x_0)$ para cada valor de la variable independiente x_0 e incremento Δx. A partir de la representación geométrica de la derivada, se deduce: $m = \tan\alpha = \dfrac{df(x_0)}{\Delta x}$, al despejar $df(x_0)$ se obtiene: $df(x_0) = f'(x_0)dx$.

Aclaración:
Formalmente la expresión generalizada de la diferencial es a su vez una función de dos variables $F(x,\Delta x)$, sin embargo en este curso las aplicaciones se concretarán a evaluar, para valores determinados de estas variables.

Observa el desarrollo, en el ejemplo siguiente:

Obtén la diferencial de la función: $f(y) = \dfrac{y\sqrt{5+2y}}{3-y^2}$; si $y_0 = -2$, $\Delta y = -\dfrac{1}{10}$.

Solución: Se obtiene la función diferencial y se sustituyen los valores.

1. Para derivar se transforma el radical a exponente fraccionario; para aplicar la fórmula correspondiente se identifica la última operación en el orden de ejecución indicada en la expresión analítica de la función, se continúa y aplica sucesivamente el mismo criterio al indicarse una derivada para elegir la siguiente fórmula, esto es, la regla de la cadena se encuentra inmersa en este procedimiento.

$$\frac{d}{dy}\left[f(y)\right] = \frac{d}{dy}\left[\frac{y(5+2y)^{\frac{1}{2}}}{3-y^2}\right]$$

2. La división es la última operación por lo tanto empleamos la fórmula $\left(\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{u}{v}\right] = \dfrac{v\dfrac{d}{dx}[u] - u\dfrac{d}{dx}[v]}{v^2}\right)$.

$$\frac{d}{dy}\left[f(y)\right] = \frac{(3-y^2)\dfrac{d}{dy}\left[y(5+2y)^{\frac{1}{2}}\right] - y(5+2y)^{\frac{1}{2}}\dfrac{d}{dy}\left[3-y^2\right]}{(3-y^2)^2}$$

3. En el numerador se indican dos derivadas, observa de izquierda a derecha cada una de ellas; en la primera derivada la última operación es el producto de dos funciones por lo tanto empleamos la fórmula

$\left(\frac{d}{dx}[uv]=u\frac{d}{dx}[v]+v\frac{d}{dx}[u]\right)$, para la derivada indicada en el segundo término es la resta la última operación, entonces empleamos la fórmula $\left(\frac{d}{dx}[u\pm v]=\frac{d}{dx}[u]\pm\frac{d}{dx}[v]\right)$ con él signo $(-)$.

$$\frac{d}{dy}[f(y)]=\frac{(3-y^2)\left[y\frac{d}{dy}\left[(5+2y)^{\frac{1}{2}}\right]+(5+2y)^{\frac{1}{2}}\frac{d}{dy}[y]\right]-y\sqrt{5+2y}\left[\frac{d}{dy}[3]-\frac{d}{dy}\left[y^2\right]\right]}{(3-y^2)^2}$$

4. En el paso anterior se indican cuatro derivadas en el numerador, procediendo como en el paso 3 , en la derivada del primer término la última operación es la raíz, expresada como potencia por lo tanto se aplica la fórmula de una potencia $\left(\frac{d}{dx}[u^n]=nu^{n-1}\frac{d}{dx}[u]\right)$, la segunda es la derivada de la variable independiente $\left(\frac{d}{dx}[x]=1\right)$; en el segundo término del numerador, en la diferencia de las dos derivadas, se indica la derivada de una constante $\left(\frac{d}{dx}[c]=0\right)$, y en la última derivada indicada, la operación final es la segunda potencia de la variable independiente, entonces se aplica la derivada de la potencia de una función.

$$\frac{d}{dy}[f(y)]=\frac{(3-y^2)\left[y\left[\frac{1}{2}(5+2y)^{1-\frac{1}{2}}\frac{d}{dy}[5+2y]\right]+\sqrt{5+2y}\,(1)\right]-y\sqrt{5+2y}\left[0-2y^{2-1}\frac{d}{dy}[y]\right]}{(3-y^2)^2}$$

5. En este paso se indican dos derivada en la primera, utilizamos la fórmula para la suma de funciones $\left(\frac{d}{dx}[u\pm v]=\frac{d}{dx}[u]\pm\frac{d}{dx}[v]\right)$ con el signo $(+)$, en la segunda se aplica la fórmula para derivar la misma variable independiente.

$$\frac{d}{dy}[f(y)]=\frac{\frac{1}{2}y(3-y^2)(5+2y)^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{d}{dy}[5]+\frac{d}{dy}[2y]\right]+(3-y^2)\sqrt{5+2y}-y\sqrt{5+2y}[-2y(1)]}{(3-y^2)^2}$$

6. La primera indica la derivada de una constante, para la segunda se aplica la fórmula $\left(\frac{d}{dx}[cu]=c\frac{d}{dx}[u]\right)$.

$$\frac{d}{dy}[f(y)]=\frac{\frac{1}{2}y(3-y^2)\frac{1}{(5+2y)^{\frac{1}{2}}}\left[0+2\frac{d}{dy}[y]\right]+(3-y^2)\sqrt{5+2y}+2y^2\sqrt{5+2y}}{(3-y^2)^2}$$

7. Para la última derivada indicada, se aplica la fórmula de la integral de la variable independiente.

$$\frac{d}{dy}[f(y)]=\frac{\frac{y(3-y^2)}{2\sqrt{5+2y}}[2(1)]+(3-y^2)\sqrt{5+2y}+2y^2\sqrt{5+2y}}{(3-y^2)^2}$$

8. Una vez que se han terminado de obtener todas las derivadas se procede a simplificar algebraicamente.

$$\frac{d}{dy}\left[f(y)\right]=\frac{\dfrac{y(3-y^2)}{\sqrt{5+2y}}+(3-y^2)\sqrt{5+2y}+2y^2\sqrt{5+2y}}{(3-y^2)^2}$$

$$\frac{d}{dy}\left[f(y)\right]=\frac{\dfrac{y(3-y^2)+(3-y^2)\left(\sqrt{5+2y}\right)^2+2y^2\left(\sqrt{5+2y}\right)^2}{\sqrt{5+2y}}}{(3-y^2)^2}$$

$$\frac{d}{dy}\left[f(y)\right]=\frac{\dfrac{y(3-y^2)+(3-y^2)(5+2y)+2y^2(5+2y)}{\sqrt{5+2y}}}{(3-y^2)^2}$$

$$\frac{d}{dy}\left[f(y)\right]=\frac{3y-y^3+15+6y-5y^2-2y^3+10y^2+4y^3}{(3-y^2)^2\sqrt{5+2y}}$$

$$\therefore \quad f'(y)=\frac{9y+15+5y+y}{(3-y)\sqrt{5+2y}}$$

9. A continuación se sustituye en la definición de la diferencial de una función $\left(df(x,\Delta x)=f'(x)dx\right)$.

$$df(y)=\left(\frac{9y+15+5y^2+y^3}{(3-y^2)^2\sqrt{5+2y}}\right)dy$$

$$df(y)=\frac{9y+15+5y^2+y^3}{(3--y^2)^2\sqrt{5+2y}}dy$$

10. Se sustituyen los valores $y=-2$ y $\Delta y=-\frac{1}{10}$; donde $\Delta y=dy$, (la variable independiente se denota con y)

$$df\left(-2,-\frac{1}{10}\right)=\left(\frac{9(-2)+15+5(-2)^2+(-2)^3}{(3-(-2)^2)^2\sqrt{5+2(-2)}}\right)\left(-\frac{1}{10}\right)$$

Y se simplifica hasta obtener la mínima expresión.

$$df\left(-2,-\frac{1}{10}\right)=\left(\frac{-18+15+5(4)+(-8)}{(3-(4))^2\sqrt{5-4}}\right)\left(-\frac{1}{10}\right)$$

$$df\left(-2,-\frac{1}{10}\right)=\left(\frac{-3+20-8}{(3-4)^2\sqrt{1}}\right)\left(-\frac{1}{10}\right)$$

$$df\left(-2,-\frac{1}{10}\right)=\left(\frac{9}{(-1)^2(1)}\right)\left(-\frac{1}{10}\right)$$

$$df\left(-2,-\frac{1}{10}\right)=\left(\frac{9}{1}\right)\left(-\frac{1}{10}\right)$$

$$\therefore \quad df(-2)=-\frac{9}{10}$$

Por lo tanto la función diferencial es $df(y)=\left(\dfrac{9y+15+5y^2+y^3}{(3-y^2)^2\sqrt{5+2y}}\right)dy$; para los datos proporcionados el valor de la diferencial es $df\left(-2,-\frac{9}{10}\right)=-\frac{9}{10}$.

Ejercicios:

A) Obtén la función diferencial de cada una de las siguientes funciones $(df(x) = f'(x)dx)$.

1. $r(s) = e^{\sqrt{s}}\cos^2 s$ R: $dr = -e^{\sqrt{s}}\left(sen\,2s - \dfrac{\cos^2 s}{2\sqrt{s}}\right)ds$.

2. $v = arc\tan x\sqrt{1+x}$ R: $dv = \dfrac{3x+2}{2\sqrt{1+x}\left(x^3+x^2+1\right)}dx$.

3. $F(u) = ln^3\left(1+ln^2u^3\right)$ R: $dF(u) = \dfrac{54 ln\,u\, ln^2\left(1+ln^2u^3\right)}{u\left(1+ln^2u^3\right)}du$.

4. $z = ln\left(1+ln\,u^3\right)^2$ R: $dz = \dfrac{6}{u\left(1+ln\,u^3\right)}du$.

5. $x = \dfrac{e^y+e^{-y}}{e^y-e^{-y}}$ R: $dx = -\dfrac{4}{\left(e^y-e^{-y}\right)^2}dy$.

B) Calcule el valor de la diferencial de cada función en el punto dado y para el incremento indicado $\left(df(x_0,\Delta x_0) = f'(x_0)dx_0;\ \text{donde } \Delta x_0 = dx_0\right)$:

1. $y = x^3 - 2x^4 + 5$ $x_0 = 2$ $\Delta x = \dfrac{1}{100}$ R: $-\dfrac{13}{25}$.

2. $w = \sqrt{\dfrac{4-r^2}{1+r^2}}$ $r_0 = 1$ $\Delta r = \dfrac{1}{25}$ R: $-\dfrac{\sqrt{6}}{60}$.

3. $f(x) = sen\,2x + \tan\dfrac{x}{4}$ $x_0 = \pi$ $\Delta x = -\dfrac{\pi}{180}$ R: $-\dfrac{\pi}{72}$.

4. $g(x) = ln^3(x+e)$ $x_0 = 0$ $\Delta x = e^{-1}$ R: $\dfrac{3}{e^2}$.

5. $y = x^2\,arc\,sen\,x$ $x_0 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\Delta x = -10^{-1}$ R: $-\dfrac{\sqrt{2}(2+\pi)}{40}$.

6. $t = v^{\frac{1}{4}}$ $v_0 = 16$ $\Delta v = -2^{-4}$ R: $-\dfrac{1}{2^9}$.

APLICACIONES DE LA DIFERENCIAL DE UNA FUNCIÓN

APROXIMACIÓN LINEAL.

a) Calcula mediante diferenciales el valor aproximado $\left(f(x+\Delta x) \approx f(x_0) + df(x_0,\Delta x_0)\right)$ de los siguientes valores:

1) $\sqrt[3]{26.91}$.

Solución: Aplicar la fórmula $f(x+\Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$ para obtener el valor aproximado al valor de $\sqrt[3]{26.91}$, se requiere identificar y proponer la función y los valores de: $x_0 + \Delta x$; x_0 ; Δx, estos últimos son respectivamente el valor que se desea calcular, el valor de aproximación (el cual es un valor exacto y con mayor proximidad al valor deseado, garantizando con esto una mejor aproximación) y la diferencia entre el valor real y el valor de aproximación (el valor incrementado o decrementado a partir de x_0).

$x_0 + \Delta x = 26.91$ $x = 3^3 = 27$ $\Delta x = (x+\Delta x) - (x)$

$\Delta x = 26.91 - 27$

$$\Delta x = -0.09$$
$$\Delta x = -\frac{9}{100}$$

La función que se identifica y propone es

$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$
$$f(x) = x^{\frac{1}{3}}$$

La derivada y la diferencial de la función, son respectivamente:

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}(1)$$
$$df(x) = \frac{dx}{3x^{\frac{2}{3}}}$$

La función $f(x)$ y la diferencial de la función $df(x)$ se evalúan en $x_0 = 3^3$, $\Delta x = -\frac{9}{100}$, donde $dx = \Delta x$, por lo tanto:

$$f(3^3) = (3^3)^{\frac{1}{3}}$$
$$= (3)^{\frac{3}{3}}$$
$$\therefore \quad f(3^3) = 3$$

$$df\left(3^3, -\frac{9}{100}\right) = \frac{-\frac{9}{100}}{3(3^3)^{\frac{2}{3}}}$$
$$= -\frac{9}{300(3)^{\frac{6}{3}}}$$
$$= -\frac{3}{100(3)^2}$$
$$= -\frac{1}{100(3)}$$
$$\therefore \quad df(3^3) = -\frac{1}{300}$$

Sustituyendo en la fórmula de aproximación lineal:

$$f(26.91) \approx 3 + \left(-\frac{1}{300}\right)$$

$$\therefore \quad f(26.91) \approx \frac{899}{300}$$

$\sqrt[3]{26.91} \approx 2.996662956...$ (Valor de la calculadora). $\frac{899}{300} = 2.99\overline{6}$ (Aproximación lineal)

$2.996662956 < 2.99\overline{6}$, comparativamente, la aproximación es el de cien milésimos.

$$\sqrt[3]{26.91} \approx \frac{899}{300}$$

2) $tan\, 46^{\circ}$

Solución: Para funciones trigonométricas inversas o directas nótese que se requiere transformar los grados a radianes, recordar que los grados son adimensionales.

En este caso: $46° = 45° + 1° = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180} radianes$

$x + \Delta x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180}$

$x_o = \frac{\pi}{4}$

$\Delta x = (x + \Delta x) - (x)$

$\Delta x = \frac{\pi}{180}$

Se propone la función: $f(x) = tan\, x$

Ahora la diferencial de la función es:

$$df(x) = sec^2 x\, dx$$

La función $f(x)$ y la diferencial de la función $df(x)$ se evalúan en $x_o = \frac{\pi}{4} radianes$, $\Delta x = \frac{\pi}{180} radianes$; recuerda, sólo para la variable independiente $dx = \Delta x$, por lo tanto:

$$df\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{180}\right) = f'(\frac{\pi}{4})\left(\frac{\pi}{180}\right)$$

$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = tan\frac{\pi}{4}$

$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$

$= sec^2 45^{\circ}\left(\frac{\pi}{180}\right)$

$= \left(\sqrt{2}\right)^2\left(\frac{\pi}{180}\right)$

$= (2)\left(\frac{\pi}{180}\right)$

$= \frac{\pi}{90}$

Aplicamos la fórmula de aproximación lineal $f(x + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$.

$$f\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180}\right) \approx f\left(\frac{\pi}{4}\right) + f'(\frac{\pi}{4})\left(\frac{\pi}{180}\right) = 1 + \frac{\pi}{90} = \frac{90 + \pi}{90}$$

Mediante la calculadora: $tan 46^{\circ} \approx 1.035530314...$

$\frac{90 + \pi}{90} \approx 1.034906585...$

$1.035530314... > 1.034906585...$ la aproximación es del orden de centésimos.

$$tan\, 46^{\circ} \approx \frac{90 + \pi}{90}$$

3. $arc\cos 0.85$

Solución: Sustituyendo en la fórmula: $f(x + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(\Delta x)$, previa identificación de los valores correspondientes.

$x_0 + \Delta x = 0.85$

$x_0 + \Delta x = \frac{17}{20}$

$x_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$x_0 \approx 0.8660254038...$

$\Delta x = (x + \Delta x) - (x)$

$\Delta x = \frac{17}{20} - \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Delta x = \frac{17 - 10\sqrt{3}}{20}$

Se propone la función:

$$f(x) = arc\cos x$$

La diferencial de la función es:

$$\begin{aligned} df(x) &= f'(x)dx \\ &= -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

La función $f(x)$ y la diferencial de la función $df(x)$ se evalúan en $x_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y $\Delta x = \frac{17-10\sqrt{3}}{20}$, donde $dx = \Delta x$, por lo tanto:

$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = arc\cos\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}rad$$

$$\begin{aligned} df\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{17-10\sqrt{3}}{20}\right) &= -\frac{\frac{17-10\sqrt{3}}{20}}{\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}} \\ &= -\frac{17-10\sqrt{3}}{20\sqrt{1-\frac{3}{4}}} \\ &= -\frac{17-10\sqrt{3}}{20\sqrt{\frac{1}{4}}} \\ &= -\frac{17-10\sqrt{3}}{20\left(\frac{1}{2}\right)} \\ &= -\frac{17-10\sqrt{3}}{10} \end{aligned}$$

Sustituyendo en la fórmula de aproximación lineal $f(x+\Delta x) \approx f(x_0) + df(x_0, \Delta x_0)$.

$$f(0.85) \approx f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + df\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{17-10\sqrt{3}}{20}\right) = \frac{\pi}{6} + \left(-\frac{17-10\sqrt{3}}{10}\right) = \frac{5\pi - 51 + 30\sqrt{3}}{30} = \frac{5(\pi + 6\sqrt{3}) - 51}{30}$$
$$= 0.5556495832...$$

Por lo tanto: $arc\cos 0.85 \approx 0.5556495832...$

Ejercicios:

1. $(100.012)^{\frac{1}{2}}$ R: $\frac{50003}{5000}$.
2. $(26.995)^{\frac{1}{3}}$ R: $\frac{16199}{5400}$.
3. $(7.996)^{-\frac{4}{3}}$ R: $\frac{15001}{24000}$.
4. $f(2.03)$ para $f(x) = x^3 - 4x^2 - 5x + 3$ R: $-\frac{1527}{100}$.

5. $sen\,31^o$ R: $\frac{180+\sqrt{3}\pi}{360}$.

6. $\cos 59^o$ R: $\frac{180+\sqrt{3}\pi}{360}$.

7. $\cot 46^o$ R: $\frac{90-\pi}{90}$.

8. $arc\,sec\,2.02$ R: $\frac{100\pi+\sqrt{3}}{300}$.

9. $arc\,tan\,0.98$ R: $\frac{25\pi-1}{100}$.

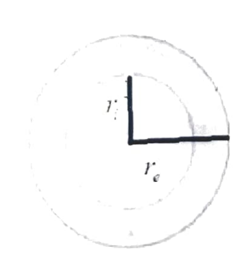
10. $arc\,sen\,0.54$ R: $\frac{25\pi+4\sqrt{3}}{150}$.

LA DIFERENCIAL COMO APROXIMACION DEL CAMBIO REAL DE UNA FUNCION.

Ejemplo:

Calcula el volumen aproximado de un cascarón esférico, el radio interior mide $1\,m$ y el radio exterior es de $1.085\,m$.

Solución: El primer paso será hacer una lista de los datos:



V : volumen del cascaron esférico.
r_i: radio interior del cascaron esférico.
r_e: radio exterior del cascaron esférico.
$r_i = 1\,m$
$r_e = 1.085\,m = \frac{217}{200}m$
Calcular el volumen aproximado del cascaron, denotado así: $V_{aprox.}$

Analizando el ejercicio, se considerarían dos esferas; al volumen de la de mayor radio se le restar el volumen de la de menor radio para obtener el volumen exacto del cascaron.
Aplicando la diferencial: el radio interior se considera como $r_0 = 1\,m$ y la diferencia entre el radio exterior y el interior el incremento del radio Δr, a partir de r_0, para obtener el volumen <u>aproximado</u> del cascaron; como a continuación se detalla:

Para efectos de comparar la aproximación que se obtiene con la diferencial, a continuación se calcula el volumen exacto del cascaron ($V_{cas.}$):

$$V_{cas.} = V_{ext.} - V_{int.}$$

$$V_{cas.} = \frac{4}{3}\pi r_{ext.}^2 - \frac{4}{3}\pi r_{int.}^2$$

$$V_{cas.} = \frac{4}{3}\pi\left(r_{ext.}^2 - r_{int.}^2\right)$$

$$V_{cas.} = \frac{4}{3}\pi\left[\left(\frac{217}{200}\right)^2 - (1)^2\right]$$

$$V_{cas.}=\frac{4}{3}\pi\left[\frac{47089-40000}{40000}\right]$$

$$V_{cas.}=\frac{4}{3}\pi\left[\frac{7089}{40000}\right]$$

$$\therefore\quad V_{casc.}=\frac{2363}{10000}\pi\approx 0.742358344\ldots m^3$$

Observa que el volumen del cascaron, calculado aproximadamente con la diferencial es mayor que el real o exacto, esta aproximación mejora si el espesor (Δr) es menor.

Ejercicios:

1. Se aplica una capa de pintura de espesor uniforme ΔR al exterior de una bóveda hemisférica de radio R metros. Determina aproximadamente la cantidad de pintura necesaria para este fin. R: $2\left(10^3\right)R^2\pi\Delta R$ litros.

2. Se está inflando un globo esférico con aire a presión uniforme. Si el diámetro es de $12cm$ ¿Cuantos cm^3 de aire se necesitan aproximadamente para aumentar el diámetro en $0.5cm$? R: $36\pi cm^3$.

3. Obtén el cambio aproximado en el volumen de un cubo cuyas aristas de $x\,cm$, se incrementan cada una en 1%. R: $\frac{3}{100}x^3cm^3$.

4. Obtén la variación aproximada en la superficie total de un cilindro circular recto cuando: a) El radio se mantiene constante mientras que la altura se incrementa en una pequeña cantidad Δh. b) La altura permanece constante mientras que el radio varía en una pequeña cantidad Δr. c) La altura en todo momento es tres veces el radio, aumentando este último de 2 a $2.045cm$. R: a) $2\pi r\Delta h$. b) $2\pi\left(h+2r\right)\Delta r$. c) $\frac{36}{25}\pi\ cm$.

5. Un tubo cilíndrico tiene un radio interior de $20mm$ y el exterior mide $20.5mm$, si la longitud del tubo mide $6cm$, obtén el volumen aproximado del tubo. R: $1200\pi\ mm^3$.

6. Cuanto varía aproximadamente el área de un sector circular de radio $r=1m$ y ángulo central $\theta=60°$ cuando: a) r aumenta $1cm$ y θ se mantiene fijo. b) θ decrece $\frac{1}{2}°$ y r se mantiene fijo. R: a) $\frac{100}{3}\pi\ cm^2$. b) $-\frac{125}{9}\pi\ cm^2$.

7. Determina mediante diferenciales la variación aproximada de la potencia $W=RI^2$ de una corriente cuya resistencia es $R=10\Omega$, si I crece de 3 a $3.02A$. R: $\frac{6}{5}W$.

8. Según Poiseuille, la resistencia R de un vaso sanguíneo de longitud l y radios r es $R=\frac{kl}{r^4}$, en donde k es una constante. Dado que l es una constante, mediante diferenciales encuentra el cambio aproximado de R cuando r cambia de $\frac{1}{5}mm$ a $\frac{3}{10}mm$. R: $-2\left(5^4\right)kl$.

9. El tallo de un hongo es de forma cilíndrica, y un tallo de $2cm$ de altura y r centímetros de radio tiene un volumen V centímetros cúbicos. Use la diferencial para calcular el incremento aproximado del volumen del tallo cuando el radio aumenta de $0.4cm$ a $0.5cm$. R: $\frac{4}{25}\pi\ cm^3$.

10. Una quemadura de forma circular en la piel de una persona es tal que si r centímetros es la longitud del radio y A centímetros cuadrados es el área de la quemadura. Utiliza la diferencial para determinar la disminución aproximada del área de la quemadura cuando el radio disminuye de $1cm$ a $0.8cm$. R: $-\frac{2}{5}\pi\ cm^2$.

11. Cierta bacteria de forma esférica es tal que si r micras es la longitud del radio y V micras cúbicas es su volumen. Determina el incremento aproximado del volumen de la bacteria cuando el radio aumenta de $2.2\ \mu m$ a $2.3\mu m$. R: $\frac{242}{125}\pi\ \mu m^3$.

12. Un tumor en el cuerpo de una persona tiene forma esférica de modo que si r centímetros es la medida del radio y V centímetros cúbicos es el volumen del tumor. Utilice diferenciales para determinar el incremento aproximado del volumen del tumor cuando el radio aumenta de $1.5\ cm$ a $1.54\ cm$. R: $\frac{144}{625}\pi\ cm^3$.

ESTIMACIÓN DE ERRORES

Ejemplo:

1. Se midió el diámetro de una esfera con un calibrador cuya precisión (aproximación) es de $0.01cm$, obteniéndose una lectura de $2\ cm$ ¿Cuál será el mayor error posible que en consecuencia se obtiene, en el cálculo del volumen?

Solución: La relación de datos antes de plantear el problema son:

ϕ : Diámetro de la esfera.
$\Delta\phi$: Aproximación de la medición (el error que se comete al hacer la medición).
dV : Error posible en el cálculo del volumen.

$$\phi_0 = 2cm$$

$$\Delta\phi = 0.01\ cm = \frac{1}{100} cm$$

Para calcular dV formulamos el volumen de la esfera en función del diámetro, y obtenemos la diferencial, para sustituir en ésta, los datos proporcionados.

$$V = \frac{1}{6}\pi\phi^3$$

$$dV = \frac{1}{2}\pi\phi_0^2 d\phi$$

$$dV = \frac{1}{2}\pi(2)^2\left(\frac{1}{100}\right)$$

$$dV = \frac{1}{2}\pi(4)\left(\frac{1}{100}\right)$$

$$\therefore \quad dV = \frac{1}{50}\pi\ cm^3$$

2. Si la altura de un cono es igual al triple del radio y en una medición de éste se efectuó un error máximo del 2%, estima aproximadamente el error porcentual máximo que repercute en el cálculo del volumen del cono.

Solución: Los datos del ejercicio son:

h : Altura del cono.
r : radio del cono.
$E_r\%$: Error porcentual al considerar la medida del radio del cono.
$E_V\%$: Error porcentual al calcular el volumen del Cono al considerar el valor inexacto del radio.
$h = 3r$
$E_r\% = 2\%$
Calcular $E_V\%$

En la fórmula para calcular el volumen del cono, sustituimos el valor de la altura con respecto al radio, dado que el error porcentual se presenta en la medición del mismo; y obtenemos el diferencial como se muestra a continuación:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 (3r)$$

Entonces el volumen del cono en función del radio se expresa como:

$$V = \pi r^3$$

$$\Rightarrow \quad dV = 3\pi r^2 dr$$

En general el error relativo respecto a la variable dependiente: $E_v = \frac{df(x)}{f(x)}$, el error porcentual:

$$E_V\% = \frac{df(x)}{f(x)}(100)\%$$

Para este ejercicio: $E_V = \frac{dV}{V}$, entonces, sustituyendo:

$$E_V\% = \frac{dV}{V}(100)\%$$

De acuerdo con los datos del problema: $dV = 3\pi r^2 dr$, dado que el volumen del cono es: $V = \pi r^3$, entonces:

$$E_V\% = \frac{3\pi r^2 dr}{\pi r^3}(100)\%$$

Simplificando:

$$E_V\% = 3\frac{dr}{r}(100)\%$$

El error relativo y porcentual respectivamente para la variable independiente son: $E_r = \frac{dr}{r}$, $E_r\% = \frac{dr}{r}(100)\%$

sustituyendo:

$$E_V\% = 3(2\%)$$

Por lo tanto el error porcentual del volumen es: $E_V\% = 6\%$.

Ejercicios:

1. El radio de una esfera es de $5.2cm$ medido con una aproximación de $0.05cm$ ¿Con que precisión se puede calcular el área?

R: $\frac{52}{25}\pi\ cm^2$.

2. Un trozo de alambre de $20cm$ de longitud se dobla hasta lograr que adquiera la forma de un rectángulo. Si la longitud de un lado es igual a $4cm$ con un error posible de $\pm 0.2cm$ ¿Cuál es el posible error al calcular el área del rectángulo?

R: $\pm\frac{2}{5}cm^2$.

3. Cuando la sangre fluye por un vaso, el flujo F (el volumen de sangre por unidad de tiempo que corre por un punto dado) es proporcional a la cuarta potencia del radio R de ese vaso (ley de Poiseuille). Una arteria parcialmente obstruida se puede expandir por medio de la operación llamada angioplastia, en la cual un catéter con un globo en la punta se infla dentro del vaso con el fin de ensancharlo y restablecer el flujo sanguíneo normal. Demuestre que el cambio relativo en F es alrededor de cuatro veces el cambio relativo en R. ¿Cómo afectará un aumento del 5% en el radio al flujo de la sangre?

R: 20%.

4. La ley de Poiseuille para el flujo de la sangre dice que el volumen que fluye por una arteria es proporcional a la cuarta potencia del radio. ¿En cuánto debe aumentar el radio para aumentar el flujo de la sangre en un 50%?

R: 12.5%.

5. Se sabe que la altura de un cilindro es dos veces la longitud del radio de su base. Si se mide el diámetro de la base con precisión del 0.1%, hállese aproximadamente el error porcentual que se cometerá en la determinación del volumen.

R: 0.3%.

6. Si el radio de un círculo puede medirse cometiendo un error de $0.01cm$ y al calcular el área se espera hacerlo con una precisión de $0.1cm^2$, determina la longitud máxima del radio para la cual ese proceso sea válido.

R: $\frac{5}{\pi}cm$.

7. Obtén los errores absoluto y relativo (de déficit o exceso) obtenidos al reemplazar el incremento de la función $y = 3x^3 + x - 1$ por su diferencial, en la aproximación lineal cuando $x = 1$ y $\Delta x = \frac{1}{10}$.

R: $\frac{93}{1000}$; $\frac{93}{1093}$.

8. Debe calcularse el volumen de una esfera a partir de una medida del radio. Mediante diferenciales, estimar el porcentaje de error máximo permisible al medir el radio si el porcentaje de error en el volumen calculado debe estar en un rango de $\pm 3\%$.

R: $\pm 1\%$.

9. ¿Con qué precisión se debe medir el radio de una bóveda hemisférica para tener a lo más un error del 0.1% en el cálculo de su área?

R: $\pm 0.05\%$.

10. Se tiene un triángulo equilátero, ¿Con qué precisión debería medirse uno de sus lados congruentes para tener un error máximo del 1.25% en el cálculo de su área?

R: $\pm 0.625\%$.

LA INTEGRAL INDEFINIDA

A) Integrales Inmediatas.

Las integrales inmediatas o reducible a inmediatas se caracterizan, porque mediante el algebra se simplifican o transforman para aplicar las formulas de la 1 a la 7 del formulario básico, incluido en el material.

Primero se verifica si la integral corresponde a los patrones establecidos en el formulario inmediato, verificando la diferencial de las funciones integrando, de no ocurrir así, se procede con las transformaciones algebraicas aplicando básicamente las siguientes estrategias:

- Multiplicación de polinomios. Productos término a término o desarrollo binomiales
- División de polinomios (procede sí, el grado del polinomio numerador (dividendo)es mayor o igual al grado del polinomio denominador(divisor)).
- La aplicación de las propiedades de los exponentes, en especial potencias con exponentes fraccionarios.

Ejemplo: $\int\left(\frac{\sqrt{r}-2r^2}{2r}\right)\left(\frac{4}{r^2}+5\sqrt{r}\right)dr$

Solución: Previa verificación de que cada uno de los dos factores no sea el diferencial del otro, descartando la posibilidad de aplicar el formulario de manera inmediata. Como no se cuenta con una fórmula para integrar un producto, se simplifica la función por integrar, primero transformando los radicales a exponentes fraccionarios $\left(\sqrt[m]{a^n}=a^{\frac{n}{m}}\right)$ para multiplicar después término a término, aplicando la propiedad del producto de potencias $(a^n a^m = a^{n+m})$ y expresarlas como numeradores $\left(\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}\right)$.

$$\int\left(\frac{r^{\frac{1}{2}}-2r^2}{2r}\right)\left(\frac{4}{r^2}+5r^{\frac{1}{2}}\right)dr$$

$$=\int\left(\frac{r^{\frac{1}{2}}}{2r}-\frac{2r^2}{2r}\right)\left(\frac{4}{r^2}+5r^{\frac{1}{2}}\right)dr$$

$$=\int\left(\frac{1}{2}r^{-\frac{1}{2}}-r\right)\left(\frac{4}{r^2}+5r^{\frac{1}{2}}\right)dr$$

$$=\int\left(2r^{-\frac{5}{2}}+\frac{5}{2}-4r^{-1}-5r^{\frac{3}{2}}\right)dr$$

Ya simplificada la función resultaron sumas y restas de expresiones simples las cuales se integran como una suma de integrales, con la fórmula $\left(\int(f+g-h)(x)dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx-\int h(x)dx\right)$.

$$=\int 2r^{-\frac{5}{2}}dr+\int\frac{5}{2}dr-\int 4r^{-1}dr-\int 5r^{\frac{3}{2}}dr$$

Antes de continuar con el proceso de integración debemos tomar en cuenta, que si el exponente cuya base es la variable independiente, toma el valor de menos uno $(n=-1)$, entonces se transforma con el recíproco $\left(a^{-n}=\frac{1}{a^n}\right)$ y aplicamos la fórmula $\left(\int\frac{u}{du}=ln|u|+c\right)$.

$$=2\int r^{-\frac{5}{2}}dr+\frac{5}{2}\int dr-4\int\frac{1}{r}dr-5\int r^{\frac{3}{2}}dr$$

En los términos que son potencias de r para $n\neq-1$ aplicar la fórmula $\left(\int u^n du=\frac{u^{n+1}}{n+1}+C\right)$ para el primero y cuarto término, en el segundo la fórmula $\left(\int du=u+C\right)$; y para el tercero la fórmula $\left(\int\frac{1}{u}du=ln|u|+C\right)$, al final se anota una sola constante de integración (C), ésta representa la suma de las constantes que generan cada integral de la suma de integrales.

$$= \frac{r^{-\frac{5}{2}+1}}{-\frac{5}{2}+1} + \frac{5}{2}r - 4\ln|r| + 5\left(\frac{r^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1}\right) + C$$

Para simplificar el resultado aplicar las propiedades y respetar las convenciones numéricas y algebraicas establecidas, como la de expresar con exponentes positivos $\left(a^{-n} = \frac{1}{a^n}\right)$, y los fraccionarios impropios simplificarlos, antes de transformarlos a radicales $\left(a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}\right)$, así mismo simplificar los logaritmos con las propiedades correspondientes $(n\ln A = \ln A^n)$. También se hace notar la propiedad <u>para n entero positivo par</u>: $|r|^n = r^n$

$$= \frac{r^{-\frac{3}{2}}}{-\frac{3}{2}} + \frac{5}{2}r - \ln r^4 + 5\left(\frac{r^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right) + C$$

$$= -\frac{2}{3}\frac{1}{r^{\frac{3}{2}}} + \frac{5}{2}r - \ln r^4 + 2r^2 r^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{3r\,r^{\frac{1}{2}}} + \frac{5}{2}r - \ln r^4 + 2r^2\sqrt{r} + C$$

$$= \frac{2}{3r\sqrt{r}} + \frac{5}{2}r - \ln r^4 + 2r^2\sqrt{r} + C$$

Una vez que se ha simplificado hasta su mínima expresión se tiene el resultado de la integral.

$$\int\left(\frac{\sqrt{r} - 2r^2}{2r}\right)\left(\frac{4}{r^2} + 5\sqrt{r}\right)dr = \frac{2}{3r\sqrt{r}} + \frac{5}{2}r - \ln r^4 + 2r^2\sqrt{r} + C$$

NOTA: *Es importante señalar que este procedimiento varia, es decir el orden en que se aplicaron las fórmulas y se simplifico es diferente para cada integral. Con la práctica se desarrolla la habilidad para integrar y no es necesario escribir todos los pasos.*

Ejercicios:

1. $\int\left(x^2 - \frac{1}{(3x)^2}\right)dx$ R: $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{9x} + c$
2. $\int\frac{t + 5t^2}{\sqrt{t}}dt$ R: $2t\sqrt{t}\left(\frac{1}{3} + t\right) + c$
3. $\int\frac{1}{\sqrt[3]{y}}(9 - y)dy$ R: $3\sqrt[3]{y^2}\left(\frac{9}{2} - \frac{1}{5}y\right) + c$
4. $\int 2\pi\frac{1}{r}\left(8 - \frac{1}{\sqrt{r}}\right)dr$ R: $4\pi\left(\ln r^4 + \frac{1}{\sqrt{r}}\right) + c$
5. $\int\left(\sqrt[3]{x^2} - \frac{3}{x^4} + \frac{x^3}{\sqrt{x}}\right)dx$ R: $\frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{2}{7}x^3\sqrt{x} + c$.
6. $\int\left(\sqrt[5]{r^3} + \frac{\sqrt{r}}{r^3} - \frac{\sqrt{r}}{\sqrt[3]{r^2}}\right)dr$ R: $\frac{5}{8}r\sqrt[5]{r^3} - \frac{2}{3r\sqrt{r}} - \frac{6}{5}\sqrt[6]{r^5} + c$.

7. $\int \frac{y^2 - 2\sqrt{y} + 1}{y^3} dy$ R: $ln|y| + \frac{4}{3y\sqrt{y}} - \frac{1}{2y^2} + c$.

8. $\int \frac{x^2 + 4x - 7}{\sqrt{x}} dx$ R: $2\sqrt{x}\left(\frac{1}{5}x^2 + \frac{4}{3}x - 7\right) + c$.

9. $\int \left(\sqrt{x} + 1\right)\left(x - \sqrt{x} + 1\right) dx$ R: $x\left(\frac{2}{5}x\sqrt{x} + 1\right) + c$.

10. $\int \left(3x^2 - 2\sqrt{x}\right)\left(x^3 - \sqrt[3]{x}\right) dx$ R: $x\left(\frac{1}{2}x^5 - \frac{9}{10}x^2\sqrt[3]{x} - \frac{4}{9}x^3\sqrt{x} + \frac{12}{11}\sqrt[6]{x^5}\right) + c$.

11. $\int \left(\sqrt{h} - \frac{1}{\sqrt{h}}\right)(h + 1)\, dh$ R: $2\sqrt{h}\left(\frac{1}{5}h^2 - 1\right) + c$.

12. $\int \left(\sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$ R: $6\sqrt[6]{x}\left(\frac{1}{11}x\sqrt[6]{x^4} - \frac{1}{5}\sqrt[6]{x^4} - \frac{1}{7}x + 1\right) + c$.

13. $\int \frac{1}{t}\left(at^2 - \frac{1}{t^2}\right)^2 dt$ R: $\frac{a^2}{4}t^4 - a\ln t^2 - \frac{1}{4t^4} + c$.

14. $\int \left(w^2 - \frac{1}{w^2}\right)^3 dw$ R: $\frac{1}{7}w^7 - w^3 - \frac{3}{w} + \frac{1}{5w^5} + c$.

B) Identifica $f(x) = u$ y $df(x) = du$ en cada integral, enseguida aplicar la fórmula de integración correspondiente o utiliza el método de sustitución y calcula:

Si no es posible reducir la integral a una inmediata recurrimos a la diferencial que es una de las herramientas más utilizadas para la integración; se identifica la función $f(x) = u$ y su diferencial $df(x) = du$, con este método denominado por cambio de variable y sustitución se reduce la integral a una inmediata. En algunos casos la transformación no resulta tan obvia, este recurso resulta práctico dada la experiencia que se obtiene en el curso de Cálculo Diferencial.

Ejemplo: $\int \left(\frac{2\,sec\,4\theta}{1 + tan\,4\theta}\right)^2 d\theta$.

Solución: Una vez que se descarta la posibilidad de aplicar la fórmula $\left(\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C\right)$ dado que no se verifica la diferencial de u (no esta "completa" la diferencial), se aplica la propiedad de los exponentes $\left(\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}\right)$, transformándose como:

$$\int \frac{4\,sec^2\,4\theta}{(1 + tan\,4\theta)^2} d\theta$$

En general en el Cálculo, se recomienda no efectuar desarrollos binomiales en el denominador u otros productos indicados, dado que dificultan o imposibilitan la integración y simplificación de los resultados. En este caso se aplica el método de cambio de variable, haciendo el cambio de variable por sustitución, la función que se elige como u es la función del denominador, dado que, la derivada del denominador es la expresión del numerador; no se considera el exponente ya que modificaría la diferencial.

$$u = 1 + tan\,4\theta$$
$$du = 4\,sec^2\,4\theta\, d\theta$$

Sustituimos los valores obtenidos en la integral.

$$\int \frac{du}{u^2}$$

Con las propiedades de los exponentes $\left(\frac{1}{a^n} = a^{-n}\right)$ transformamos el denominador a numerador.

Aplicamos la fórmula $\left(\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C\right)$.

$$\begin{aligned}\int u^{-2} du &= \frac{u^{-2+1}}{-2+1} + c \\ &= \frac{u^{-1}}{-1} + c \\ &= -\frac{1}{u} + c\end{aligned}$$

Para retomar la variable original se sustituye el valor de $u = 1 + tan\, 4\theta$. Por lo tanto:

$$\int \left(\frac{2\sec 4\theta}{1 + tan\, 4\theta}\right)^2 d\theta = \frac{1}{1 + tan\, 4\theta} + c$$

NOTA: *No todas las integrales son inmediatas o reducibles a éstas, si al verificar la diferencial le falta alguna expresión en términos de la variable o es diferente, posteriormente se analizarán bajo algún artificio de integración o algún método de integración contemplado en el programa. En esta sección se integrarán funciones que completen su diferencial con alguna constante (negativa o positiva). También es necesario prever que otras funciones no serán integrables aplicando métodos analíticos requiriendo de métodos de aproximación.*

Ejercicios:

1. $\int 2(1+2x)\,dx$ — R: $\frac{1}{2}(1+2x)^2 + c$

   $2x(1+x) + c$

2. $\int -2x\sqrt{9-x^2}\,dx$ — R: $\frac{2}{3}(9-x^2)\sqrt{9-x^2} + c$.

3. $\int \frac{3t^2}{t^3+5}\,dt$ — R: $ln\left|t^3+5\right| + c$.

4. $\int \frac{-4y}{\sqrt[3]{1-2y^2}}\,dy$ — R: $\frac{3}{2}\sqrt[3]{\left(1-2y^2\right)^2} + c$.

5. $\int 3x^2 \sec x^3 \tan x^3\,dx$ — R: $\sec x^3 + c$.

6. $\int \frac{dy}{y^2 e^{\frac{1}{y}}}$ — R: $\frac{1}{e^{\frac{1}{y}}} + c$.

7. $\int \sqrt{\frac{h-1}{h}}\,\frac{1}{h^2}\,dh$ — R: $\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{h}\right)\sqrt{1-\frac{1}{h}} + c$.

8. $\int \left(2r + \frac{1}{r^2}\right)\sqrt[3]{r^2 - \frac{1}{r}}\,dr$ — R: $\frac{3}{4}\left(r^2 - \frac{1}{r}\right)\sqrt[3]{r^2 - \frac{1}{r}} + c$.

9. $\int \frac{3t^2+6t}{t^3+3t^2+1}dt$ R: $ln\left|t^3+3t^2+1\right|+c$.

10. $\int \frac{6e^{2x}}{\sqrt{1+e^{2x}}}dx$ R: $6\sqrt{1+e^{2x}}+c$.

11. $\int \frac{dy}{y\sqrt[3]{1+ln\,y}}$ R: $\frac{3}{2}\sqrt[3]{(1+ln\,y)^2}+c$.

12. $\int \frac{1}{3}sen\frac{h}{3}\;cos\frac{h}{3}dh$ R: $\frac{1}{2}sen^2\frac{1}{3}h+c$.

13. $\int tan^2\left(r+\frac{\pi}{4}\right)sec^2\left(r+\frac{\pi}{4}\right)dr$ R: $\frac{1}{3}tan^3\left(r+\frac{\pi}{4}\right)+c$.

14. $\int sen^2t\;cos\,t\,dt$ R: $\frac{1}{3}sen^3t+c$.

15. $\int \frac{2\,tan\,x\,sec^2\,x}{\left(2+tan^2\,x\right)^2}dx$ R: $-\frac{1}{2+tan^2\,x}+c$.

16. $\int \frac{sen\,y+cos\,y}{sen\,y-cos\,y}dy$ R: $Ln\left|sen\,y-cos\,y\right|+c$.

17. $\int \frac{2}{\left(1+4h^2\right)arc\,tan\,2h}dh$ R: $Ln\left|arc\,tan\,2h\right|+c$.

18. $\int \sqrt{\frac{arc\,sen\,r}{1-r^2}}dr$ R: $\frac{2}{3}(arc\,sen\,r)\sqrt{arc\,sen\,r}+c$.

19. $\int \frac{\sqrt{t}+ln^3t}{t}dt$ R: $2\sqrt{t}+\frac{1}{4}Ln^4t+c$.

20. $\int\left[\frac{1}{x\,ln^2x}+\frac{ln\,x^3}{x}\right]dx$ R: $\frac{3}{2}ln^2x-\frac{1}{ln\,x}+c$.

C) Mediante manipulaciones algebraicas, compensaciones y/o sustituciones, calcula las siguientes integrales:

Ejemplo: $\int \frac{r^2+1}{\sqrt{r^3+3r}}dr$

Solución: Previa discriminación de fórmula $\left(\int u^n du=\frac{u^{n+1}}{n+1}+C\right)$ mediante la verificación de la diferencial, la función por integrar se transforma aplicando las propiedades de los radicales y expresando como potencias con exponente fraccionario $\left(\sqrt[m]{a^n}=a^{\frac{n}{m}}\right)$ en el numerador $\left(\frac{1}{a^n}=a^{-n}\right)$, considerando la base como la función $u=r^3+3r$, así la integral se va transformando como se muestra a continuación:

$$\int \frac{r^2+1}{(r^3+3r)^{\frac{1}{2}}}dr=$$

$$=\int (r^3+3r)^{-\frac{1}{2}}(r^2+1)\,dr$$

Donde:

$$u=r^3+3r$$
$$du=(3r^2+3)\,dr$$

$$du = 3(r^2+1)\,dr$$

Observa que le faltaría la constante 3, para verificarse la diferencial correspondiente a la fórmula, por lo tanto para integrar mediante cambio de variable se despeja, dividiendo entre 3 a ambos lados de la anterior igualdad.

$$\frac{du}{3} = (r^2+1)\,dr$$

Al Sustituir en la integral los valores correspondientes en términos de u se obtiene:

$$\int u^{-\frac{1}{2}}\frac{du}{3}$$

Aplicando la fórmula $\left(\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1}+C\right)$ y simplificando:

$$= \frac{1}{3}\int u^{-\frac{1}{2}}\,du$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right)+c$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right)+c$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{u}+c$$

Sustituimos el valor de $u = r^3+3r$, para expresar el resultado en función de la variable original

$$= \frac{2}{3}\sqrt{r^3+3r}+c$$

Por lo tanto:

$$\int \frac{r^2+1}{(r^3+3r)^{\frac{1}{2}}}\,dr = \frac{2}{3}\sqrt{r^3+3r}+c\,.$$

También se procede por compensaciones, esto es: se multiplica y divide por 3 (por la unidad) el 3 como factor completa la diferencial, haciendo posible la aplicación de la fórmula $\left(\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1}+C\right)$.

$$\frac{1}{3}\int (r^3+3r)^{-\frac{1}{2}}\,3(r^2+1)\,dr$$

De esta forma se identifica la fórmula para integrar:

$$\frac{1}{3}\int u^{-\frac{1}{2}}\,du$$

Obteniéndose el mismo resultado.

NOTA: La verificación de la diferencial de la función por integrar para la adecuación y aplicación de las formulas se realizará estratégicamente, antes de elegir algún método o artificio para integrar.

Ejercicios:

1. $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^4}}dx$ R: $\frac{1}{2}\sqrt{1+x^4}+c$.

2. $\int \frac{y^2}{16-y^3}dy$ R: $ln\frac{1}{\sqrt[3]{|16-y^3|}}+c$.

3. $\int t\sqrt[4]{t^2+2}\,dt$ R: $\frac{2}{5}(t^2+2)\sqrt[4]{t^2+2}+c$.

4. $\int \frac{r}{(3-4r^2)^5}dr$ R: $\frac{1}{32(3-4r^2)^4}+c$.

5. $\int 3e^{2x}\sqrt{1+e^{2x}}\,dx$ R: $(1+e^{2x})\sqrt{1+e^{2x}}+c$.

6. $\int (cos^2 2\theta - sen^2 2\theta)\,d\theta$ R: $\frac{1}{4}(sen 2\theta + cos 2\theta)^2+c$.

7. $\int \frac{dt}{\sqrt{2t-1}}$ R: $\sqrt{2t-1}+c$.

8. $\int \frac{sec^2\frac{t}{2}\,tan\frac{t}{2}}{\sqrt{sec^2\frac{t}{2}+1}}dt$ R: $2\sqrt{sec^2\frac{1}{2}t+1}+c$.

9. $\int \frac{csc^2 2x}{(1-cot 2x)^3}dx$ R: $-\frac{1}{4(1-cot\,2x)^2}+c$.

10. $\int \frac{x\cos x}{(\cos x + x\,sen\,x)^2}dx$ R: $-\frac{1}{\cos x + x\,sen\,x}+c$.

11. $\int \frac{e^{3t}ln(1+e^{3t})}{e^{3t}+1}dt$ R: $\frac{1}{6}ln^2|1+e^{3t}|+c$.

12. $\int \frac{2sen\,3x}{5+cos\,3x}dx$ R: $Ln\frac{1}{\sqrt[3]{(5+cos\,3x)^2}}+c$.

13. $\int \frac{sen\frac{\pi\theta}{3}}{\sqrt[3]{cos^2\frac{\pi\theta}{3}}}d\theta$ R: $-\frac{9}{\pi}\sqrt[3]{cos\frac{\pi}{3}\theta}+c$.

14. $\int 2\left(e^x+\frac{1}{e^x}\right)^2 dx$ R: $e^{2x}-\frac{1}{e^{2x}}+4x+c$.

15. $\int \frac{x-1}{x+1}dx$ R: $x-ln(x+1)^2+c$.

16. $\int \frac{x^2+5x+7}{x+3}dx$ R: $\frac{1}{2}(x+2)^2+ln|x+3|+c$; $\frac{1}{2}x^2+2x+ln|x+3|+c$

17. $\int \frac{x^2}{x^2-4x+8}dx$ R: $x+ln(x^2-4x+8)^2+c$.

18. $\int 5\sqrt[4]{3x^4-4x^6}\,dx$ R: $-\frac{1}{2}(3-4x^2)\sqrt[4]{3-4x^2}+c$.

19. $\int 3^{2x}e^x dx$ R: $\frac{(9e)^x}{1+ln9}+c$.

20. $\int\sqrt{\frac{1+\sqrt{x}}{3x}}\,dx$ R: $\frac{4\sqrt{3}}{9}(1+\sqrt{x})\sqrt{1+\sqrt{x}}+c$.

CONSTANTE DE INTEGRACIÓN

Una ecuación que contiene una función y sus derivadas (o diferenciales), o sólo sus derivadas (o diferenciales), como incógnitas, se denomina ecuación diferencial. Las ecuaciones diferenciales se aplican en muchos campos diversos, como son: la Física, Química, Biología, Psicología, Administración, Economía entre muchas otras.

Existen diferentes métodos para resolver ecuaciones diferenciales en este curso solo aplicaremos el método mas básico para *las ecuaciones diferenciales de primer orden con variables separables.* Éstas son ecuaciones que incluyen sólo la primera derivada de la función y son tales que las variables se pueden separa; de tal manera que pueda obtenerse una solución general para un grupo de familias de funciones que dependen de la constante de integración (c) y la solución particular donde se sustituirán las condiciones iníciales en la solución general para obtener el valor de la constante de integración para dicho caso.

Ejemplo: Obtén la solución general de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx}=\frac{x+3x^2}{y^2}$, y después la particular cuando la condición inicial es $P(0,6)$.

Solución: Se multiplicara a ambos lados de la igualdad por la diferencial de la variable independiente dx, recuerda que $\frac{dy}{dx}$ no es un cociente si no el símbolo de derivada que al ser multiplicado por dx se transforma en la diferencial de la variable dependiente dy.

$$dx\left(\frac{dy}{dx}\right)=\left(\frac{x+3x^2}{y^2}\right)dx$$
$$dy=\frac{x+3x^2}{y^2}dx$$

Se despejamos las variables de tal forma que queden en el mismo miembro incluyendo sus respectivos diferenciales:

$$(y^2)dy=\left(\frac{x+3x^2}{y^2}dx\right)y^2$$
$$y^2dy=(x+3x^2)dx$$

Al integrar ambos miembros de la igualdad:

$$\int y^2dy=\int(x+3x^2)dx$$
$$\int y^2dy=\int x\,dx+3\int x^2dx$$
$$\frac{y^3}{3}+c_1=\frac{x^2}{2}+3\left(\frac{x^3}{3}\right)+c_2$$

Despejando las constantes de integración para ubicarlas en uno de los miembros como una constante, como no se conoce su valor no se cancelan o se hacen cero, solo forman una constante de integración general (c).

$$\frac{y^3}{3}+c_1-c_1=\frac{x^2}{2}+3\left(\frac{x^3}{3}\right)+c_2-c_1$$
$$\frac{1}{3}y^3=\frac{1}{2}x^2+x^3+c$$

$$\frac{1}{3}y^3=\frac{1}{2}x^2+x^3+c$$

Y esta será la solución general de la ecuación diferencial.

Para el caso particular sustituimos los valores de x y y del la condición inicial que nos dan como dato $P(0,6)$ en la solución general, para obtener el valor de c.

$$\frac{1}{3}(6)^3=\frac{1}{2}(0)^2+(0)^3+c$$
$$\frac{1}{3}(216)=\frac{1}{2}(0)+0+c$$
$$72=0+c$$
$$c=72$$

Una vez que se a obtenido el valor de la constante de integración este se sustituye en la solución general para obtener la solución particular.

$$\frac{1}{3}y^3=\frac{1}{2}x^2+x^3+72$$

Obtén la solución general de la ecuación diferencial $f'(s)=6s-8s^2$, y después la particular cuando la condición inicial es $f(2)=3$.

Solución: Se multiplicara ambos lados de la igualdad por la diferencial de la variable independiente ds.

$$ds\left(f'(s)\right)=\left(6s-8s^2\right)ds$$
$$df(s)=\left(6s-8s^2\right)ds$$

Una vez que tenemos la ecuación diferencial procedemos a integrar ambos lados de la igualdad.

$$\int df(s)=\int\left(6s-8s^2\right)ds$$
$$\int df(s)=\int 6s\,ds-\int 8s^2ds$$
$$\int df(s)=6\int s\,ds-8\int s^2ds$$
$$F(s)+c_1=6\left(\frac{s^2}{2}\right)-8\left(\frac{s^3}{3}\right)+c_2$$
$$F(s)+c_1=3s^2-\frac{8}{3}s^3+c_2$$

Despejamos las constantes de integración para ubicarlas del mismo lado, como no se conoce su valor no se cancelan o se hacen cero, solo forman una constante de integración general (c).

$$F(s)+c_1-c_1=3s^2-\frac{8}{3}s^3+c_2-c_1$$
$$F(s)=3s^2-\frac{8}{3}s^3+c$$

Por lo tanto la solución general es: $F(s)=3s^2-\frac{8}{3}s^3+c$

Para el caso particular sustituimos los valores de s y $f(s)$ del la condición inicial que nos dan como dato $f(2)=3$ en la solución general, para obtener el valor de c.

$$F(2)=3(2)^2-\frac{8}{3}(2)^3+c$$
$$3=3(4)-\frac{8}{3}(8)+c$$
$$3=12-\frac{64}{3}+c$$
$$3=-\frac{28}{3}+c$$
$$c=\frac{37}{3}$$

Por lo tanto la solución particular es: $F(s)=3s^2-\frac{8}{3}s^3+\frac{37}{3}$

Ejercicios:
Dada las siguientes ecuaciones diferenciales, obtén la solución general las siguientes ecuaciones diferenciales y después determina la condición particular de cada una de ellas de acuerdo a su correspondiente condición inicial.

1. $\frac{dy}{dx}=2x$; $(2,-2)$.
   R: $y=x^2+c$, $y=x^2-2$.

2. $\frac{dy}{dx}=2\sqrt{x}$; $(4,12)$.
   R: $y=\frac{4}{3}x\sqrt{x}+c$, $3y=4x\sqrt{x}+4$.

3. $\frac{dy}{dx}=-xy$; $(0,2)$.
   R: $ln|y|=-\frac{1}{2}x^2+c$, $y=e^{-\frac{1}{2}x^2+ln\,2}$.

4. $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x^2}$; $(1,1)$.
   R: $ln|y|=-\frac{1}{x}+c$, $y=e^{-\frac{1}{x}+1}$.

5. $\frac{dy}{dx}=\frac{x+1}{y+1}$; $(0,1)$.
   R: $(y+1)^2=(x+1)^2+c$, $(y+1)^2-(x+1)^2=3$

6. $f'(x)=4x$; $F(0)=6$.

R: $F(x)=2x^2+c$

$F(x)=2x^2+6$.

7. $h'(t)=8t^3+5$; $H(1)=-4$

R: $H(t)=2t^4+5t+c$

$H(t)=2t^4+5t-11$

8. $g'(y)=3y^2+1$; $G(2)=6$

R: $G(x)=x^3+x+c$

$G(x)=x^3+x-4$

9. $r'(t)=94e^{\frac{2}{125}t}$; $R(0)=120$

R: $R(t)=5875e^{\frac{2}{125}t}+c$

$R(t)=5875e^{\frac{2}{125}t}-5755$

10. $f'(t)=10e^{-\frac{2}{5}t}$; $f(0)=20$

R: $F(t)=-25e^{-\frac{3}{5}t}+c$

$F(t)=20-25e^{-\frac{3}{5}t}$

PROBLEMAS DE APLICACIÓN

1. Sea $P(t)$ la producción total de una fábrica de ensamblaje después de t horas de trabajo. Supón que la tasa de producción al tiempo t es $\left(60+2t-\frac{t^2}{4}\right)\frac{unidades}{hora}$. Encuentra la expresión para $P(t)$.

R: $P(t)=60t+t^2-\frac{1}{12}t^3$.

2. Después de t horas de operación, una mina está produciendo carbón a razón de $\left(40+2t-\frac{t^2}{3}\right)\frac{ton. de carbon}{hora}$. Encuentra una función que describa la producción total de la mina después de t horas de operación.

R: $P(t)=40t+t^2-\frac{1}{9}t^3$.

3. Una epidemia de gripe ataca a una población. Sea $P(t)$ el número de personas enfermas de gripe al tiempo t, donde el tiempo se mide en días a partir del inicio de la epidemia y $P(0)=100$. Supón que después de t días la gripe se está extendiendo a razón de $(120t-3t^2)\frac{presonas}{dia}$. Determina la función $P(t)$.

R: $T(t)=60t^2-t^3+100$.

4. Una pequeña tienda de corbatas encuentra que en un nivel de ventas de x corbatas diarias tiene una ganancia marginal de $GM(x)\frac{dolares}{corbata}$, donde está dada por la función $GM(x)=\frac{13}{10}+\frac{3x}{5}-\frac{9x^2}{5000}$. También la tienda pierde \$95 al nivel de ventas $x=0$. Encuentra las ganancias de operar con un nivel de ventas de x corbatas diarias.

R: $G(x)=\frac{13}{10}x+\frac{3}{10}x^2-\frac{3}{5000}x^3-95$.

5. Un fabricante de detergente estima que el costo marginal por producir detergente en polvo es $\frac{x}{5}+1$ cientos de dólares a un nivel de producción de x toneladas diarias. Los costos fijos son de \$200 diarios. Determina el costo de producir x toneladas de detergente en polvo diariamente.

R: $C(x)=\frac{1}{10}x^2+x+200$.

6. Encuentra la expresión de la función $F(x)$ cuya recta tangente tiene como pendiente $3x^2+1$ para cada valor de x y la gráfica de $F(x)$ pasa por el punto $(2,6)$.
R: $f(x)=x^3+x-4$.

7. Un fabricante de automóviles estima que el gasto de mantenimiento, de uno de sus modelos, está cambiando a un ritmo de $\left(1000+10t^2\right)\frac{pesos}{año}$, donde t es el tiempo en años, que han transcurrido desde que el auto se fabricó. ¿Cuál será el gasto de mantenimiento anual del carro, cuando éste tenga cinco años de haberse fabricado?
R: $\$\frac{16250}{3}$.

8. Una herida esta sanando de manera que t días a partir del lunes el área de la herida ha disminuido a una tasa de $-3(t+2)^{-2}\frac{cm^2}{dia}$. Si el martes el área de la herida fue de $2cm^2$. a) ¿Cuál era el área de la herida el lunes? b) ¿Cuál será el área prevista de la herida el viernes si continua sanando a esa misma tasa?
R: a) $\frac{5}{2}cm^2$, b) $\frac{3}{2}cm^2$.

9. Para los primeros $10\,días$ de diciembre una célula vegetal creció de forma que t días después del 1 de diciembre el volumen de la célula estuvo creciendo a una tasa de $(12-t)^{-2}\frac{\mu m^3}{dia}$. Si el 3 de diciembre el volumen de la célula fue de $3\,\mu m^3$, ¿Cuál fue el volumen el 8 de diciembre?
R: $\frac{31}{10}\mu m^3$.

10. Una pelota es lanzada hacia arriba desde una altura de $256\,ft$ sobre el nivel del suelo, con una velocidad inicial de $96\frac{ft}{s}$. Por las leyes físicas se sabe que la velocidad al tiempo t es de $(96-32t)\frac{ft}{s}$. a) Encuentra $h(t)$, la función que da la altura de la pelota al tiempo t. b) ¿Cuánto tiempo tardará la pelota en llegar al piso? c) ¿A qué altura llegará la pelota?
R: a) $h(t)=96t-16t^2+256$, b) $t=8s$, c) $h_{max}=400\,ft$.

11. Una roca cae desde la cima de un risco de $400m$ de altura. Su velocidad a los t segundos es $v(t)=-98t\frac{m}{s}$. a) Determina la función $s(t)$, que describe la altura de la roca desde el suelo en el tiempo t. b) ¿Cuánto tardará en alcanzar el suelo? c) ¿Cuál será su velocidad al tocar el piso?
R: a) $s(t)=-49t^2+400$; b) $t=\frac{20}{7}s$; c) $v_f=-280\frac{m}{s}$.

12. Se estima que dentro de x meses la población de una ciudad estará cambiando a un ritmo de $\left(2+5\sqrt{x}\right)\frac{personas}{mes}$. La población actual es de 5000. a) Expresa el número de habitantes como una función de los meses transcurridos. b) ¿Cuál será la población dentro de 9 meses? c) ¿Cuánto habrá crecido la población entre el noveno y el trigésimo sexto mes?
R: a) $P(x)=2x+\frac{10}{3}x\sqrt{x}+5000$; b) $P(9)=5108\,personas$; c) $P(36)-P(9)=684\,personas$.

13. El valor de reventa de cierto equipo de laboratorio disminuye a un ritmo que cambia con el transcurso del tiempo. Cuando tiene t años, el ritmo al que está cambiando su valor es $220(t-10)\frac{dolares}{año}$. Si se compró nueva por 12000 dólares. a) Expresa el valor de reventa del equipo como una función que dependa del tiempo

transcurrido a partir de la fecha de compra. b) ¿Cuánto valdrá 10 años después? c) ¿El valor que obtenido en el inciso anterior, ¿es el menor valor de reventa? Justifica tu respuesta.

R: a) $V(t)=110t^2-2200t+12000$; b) $V(10)=1000$; c) Si (justificar).

14. Se estima que dentro de x años el valor de una hectárea de tierra de cultivo estará aumentando a una tasa de: $\dfrac{\frac{2x^3}{5}}{\sqrt{\frac{x^4}{5}+8000}}\dfrac{dolares}{años}$. Si la tierra tiene actualmente un valor de 500 dólares por hectárea. a) Expresa el valor de la tierra de cultivo como una función que depende del tiempo. b) ¿Qué valor tendrá dentro de cinco años?

R: a) $V(x)=\sqrt{\frac{1}{5}x^4+8000}+500-40\sqrt{5}$; b) $V(5)=500+25\sqrt{13}-40\sqrt{5}$.

15. Determina la expresión analítica de la función $f(x)$ cuya tangente tiene una pendiente de $x\sqrt{x^2+5}$ para cada valor de x, además la gráfica de $f(x)$ pasa por el punto $(2,10)$.

R: $f(x)=\frac{1}{3}(x^2+5)(x^2+5)^{\frac{1}{2}}+1$.

16. Un árbol ha sido trasplantado; después de x años está creciendo a una tasa de $1+\frac{1}{(x+1)^2}\frac{metros}{años}$. Después de 2 años ha alcanzado una altura de 5 metros. ¿Cuál era su altura cuando fue trasplantado?

R: $\frac{7}{3}m$.

17. Un estudio indica que dentro de x meses la población en cierta comunidad estará creciendo a un ritmo de $(2+6\sqrt{x})\frac{pesonas}{mes}$. Actualmente habitan 10000 personas: a) Estima el número de personas que conformarán la población dentro de 9 meses. b) ¿Cuánto aumentó la población durante los primeros cuatro meses?

R: a) $P(9)=10126\,personas$; b) $P(4)-P(0)=40\,personas$.

18. En cierto supermercado, el precio actual de la carne molida **"preferente"** es de 50 pesos kilo. Se estima que en las próximas 8 semanas el precio estará creciendo a un ritmo de $\frac{3}{50}\sqrt{x+1}\frac{pesos}{semana}$. a) ¿Cuál es el precio por kilo al final de la octava semana? b) ¿En cuál de las ocho semanas será más grande el incremento del precio y cuál es este?

R: a) $P(8)=\$\frac{1276}{25}$; b) *Calcula el incremento para cada semana.*

19. Un paquete de fresas congeladas se sacan de un congelador a $-5^\circ C$, a una habitación a $20^\circ C$. Al tiempo t la temperatura promedio de las fresas está aumentando a razón de $10e^{-\frac{2}{5}t}\frac{^\circ C}{hora}$. Calcula la temperatura de las fresas al tiempo t.

R: $T(t)=20-25e^{-\frac{2}{5}t}$.

20. Estados Unidos ha consumido mineral de hierro a razón de $R(t)\frac{millones\,de\,ton.\,métricas}{año}$ al tiempo t, donde $t=0$ corresponde a 120 millones consumidos en el año 1980 y $R(t)=94e^{\frac{2}{125}t}$. Determina la función que modela el consumo total de mineral de hierro en Estados Unidos de 1980 hasta el tiempo t.

R: $C(t)=5875e^{\frac{2}{125}t}-5755$.

21. Se ha proyectado que dentro de t años la demanda de azúcar refinada de un cierto país estará cambiando a un ritmo de $e^{\frac{1}{25}t}\ \dfrac{toneladas}{año}$. Si la demanda actual es de 70 toneladas. a) Expresa la demanda de azúcar refinada en función del tiempo. b) ¿Qué cantidad de azúcar se consumirá en el país en los próximos 10 años? c) ¿Cuándo se habrá duplicado la demanda inicial?

R: a) $X(t)=25e^{\frac{1}{25}t}+45$; b) $X(10)=25e^{\frac{2}{5}}+45\,ton.$; c) $t=25ln\dfrac{19}{5}\ años$.

22. En cierta comunidad la demanda de gasolina está aumentando a razón de $e^{\frac{1}{20}t}\ \dfrac{miles\,de\,litros}{año}$. Si la demanda actual es de 16 mil litros. a) ¿Cuánta gasolina se consumirá dentro de tres años? b) ¿Cuánta gasolina se consumirá en los próximos tres años?

R: a) $X(3)=20e^{\frac{3}{20}}-4miles\,de\,litros$; b) $X(3)-X(0)=20e^{\frac{3}{20}}-20miles\,de\,litros$.

23. La población de una ciudad está cambiando a un ritmo de: $e^{\frac{1}{30}x}\ \dfrac{personas}{mes}$. Actualmente, la población es de 3252000 personas. ¿Cuál será el tamaño de la población dentro de cinco meses?

R: $30e^{\frac{1}{6}}+3251970\,personas$.

24. La población de cierta especie animal está creciendo, según estimaciones, a una tasa exponencial. Cuando se identificó y se clasificó inicialmente, la población se calculó en: 50000. Cinco años después es de 75000, según las estimaciones hechas. Si $P(t)$ es la población de esta especie en el momento t, donde t se mide en años, y el crecimiento de la población ocurre a una tasa: $P'(t)=50000ke^{kt}$ (k constante). Determina el valor de k y la función $P(t)$ que describe el tamaño de la población.

R: $k=\dfrac{1}{5}ln\dfrac{3}{2}$; $P(t)=50000e^{\frac{1}{5}ln\left(\frac{3}{2}\right)t}$

CONCEPTO DE INTEGRAL DEFINIDA

A) Empleando notación de sumatorias representa las siguientes sumas:

1. $5+7+9+11+13+15$
2. $a_1^2+a_2^3+a_3^4+a_4^5+a_5^6$
3. $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{12}$
4. $\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{4}+\dfrac{5}{8}+\dfrac{7}{16}+\dfrac{9}{32}$
5. $\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{4}+\dfrac{4}{5}+\dfrac{5}{6}+\dfrac{6}{7}+\dfrac{7}{8}$
6. $0.05+0.0005+0.000005+0.00000005$

B) Calcula el valor de las siguientes sumatorias:

1. $\sum_{r=0}^{4}2^{-r}$ R: $\dfrac{31}{16}$.
2. $\sum_{n=1}^{5}(n+1)(n+2)$ R: 110.
3. $\sum_{r=0}^{5}\dfrac{(-1)^r}{r+1}$ R: $\dfrac{37}{60}$.
4. $\sum_{i=0}^{6}\dfrac{i-1}{i+1}$ R: $\dfrac{127}{70}$.
5. $\sum_{k=4}^{10}7$ R: 49.
6. $\sum_{i=1}^{4}\dfrac{1}{(2i-1)(2i+1)}$ R: $\dfrac{4}{9}$.

C) Aplicando los resultados obtenidos para $\sum_{i=1}^{n} i$, $\sum_{i=1}^{n} i^2$ y $\sum_{i=1}^{n} i^3$, obtenga la fórmula que dependa de k para:

1. $\sum_{i=1}^{k}(2i-1)$ R: k^2.
2. $\sum_{i=1}^{k}(2i+1)^2$ R: $\frac{4}{3}k^3+4k^2+\frac{11}{3}k$.
3. $\sum_{r=1}^{k}(2r)^3$ R: $2k^4+4k^3+2k^2$.
4. $\sum_{r=1}^{k}(k+r)(k-r)$ R: $\frac{2}{3}k^3+\frac{1}{2}k^2+\frac{1}{6}k$.

D)

1. Dada la función $f(x)=x^2+x$ y $\left\{0,\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},2,\frac{5}{2},3\right\}$ una partición de $[0,3]$, determina la suma inferior y superior de la función correspondiente a está partición. R: $\overline{s}=\frac{133}{8}u^2$, $\underline{s}=\frac{85}{8}u^2$.

2. Para la función $g(x)=2x+3$ en el intervalo $[0,2]$, calcula la suma superior e inferior relativa a la partición $P=\left\{0,\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{3}{5},\frac{4}{5},1,\frac{6}{5},\frac{7}{5},\frac{8}{5},\frac{9}{5},2\right\}$. R: $\overline{s}=\frac{52}{5}u^2$, $\underline{s}=\frac{48}{5}u^2$.

3. Con la función $T(x)=9-3x$ y las particiones $P'=\left\{1,\frac{7}{5},\frac{9}{5},\frac{11}{5},\frac{13}{5},3\right\}$, $P''=\left\{1,\frac{6}{5},\frac{7}{5},\frac{8}{5},\frac{9}{5},2,\frac{11}{5},\frac{12}{5},\frac{13}{5},\frac{14}{5},3\right\}$, calcula, para cada partición la suma superior e inferior.

R: $\overline{s'}=\frac{36}{5}u^2$, $\overline{s''}=\frac{33}{5}u^2$, $\underline{s'}=\frac{24}{5}u^2$, $\underline{s''}=\frac{27}{5}u^2$.

4. Considerando la función dada por $F(x)=\begin{cases}2x+1, & 0\le x<2\\ (x-2)^2+5, & 2\le x\le 4\end{cases}$ y la partición, $P=\left\{0,\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},2,\frac{11}{4},3,\frac{13}{4},4\right\}$, calcula la suma superior e inferior de F correspondiente a P.

R: $\overline{s}=\frac{337}{16}u^2$, $\underline{s}=\frac{265}{16}u^2$.

E) Aplicando la definición, obtén el área exacta de la región limitada por la gráfica de la función $f(x)$ y el eje $\overleftrightarrow{OX}$, en el intervalo indicado:

1. $f(x)=3x^2+4$, $en\,[1,3]$. R: $34u^2$.
2. $f(x)=9-x^2$, $en\,[0,3]$. R: $18u^2$.
3. $f(x)=4x^2-2$, $en\,[2,5]$. R: $150u^2$.
4. $f(x)=12-3x^2$, $en\,[1,2]$. R: $5u^2$.
5. $f(x)=x^2-4x+7$, $en\,[1,3]$. R: $\frac{20}{3}u^2$.
6. $f(x)=\begin{cases}2x+1; & 0\le x\le 2\\ x^2-4x+9; & 2<x\le 4\end{cases}$, $en\,[0,4]$. R: $\frac{56}{3}u^2$.

F)

1. Calcula $\int_0^b x^3dx$. R: $\frac{b^4}{4}$.

2. De acuerdo con la interpretación de $\alpha(x)=\int_a^x f(t)\,dt$, $a \le x$, como la "función área de f en $[a,x]$, construye la gráfica de $\alpha(x)$ y su expresión analítica para:

a) $f(t)=4$, $en\ [0,3]\ y\ en\ [2,4]$.

b) $f(t)=3t$, $en\ [0.2]\ y\ en\ [3,4]$.

c) $f(t)=|t-1|$, $en\ [-2,2]$.

d) $f(t)=\begin{cases} 2-t, & si\ 0\le t\le 1 \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}t, & si\ 1\le t \end{cases}$, $en\ [0,2]$.

G) Aplicando el Teorema Fundamental del Cálculo (primera parte), determina:

1. $\frac{dF}{dx}$, para $F(x)=\int_2^x (w^2+1)\,dw$

2. $\frac{dG}{dx}$, para $G(x)=\int_4^x (w^2-1)\,dw$

3. $\frac{dT}{dy}$, para $T(y)=\int_1^y (r^2-1)\,dr$

4. $\frac{dH}{dx}$, para $H(x)=\int_x^1 (r^2-1)\,dr$

5. $P'(w)$, para $P(w)=\int_w^b \frac{dt}{1+t^2+sen^2 t}$

6. $dF(x)$, para $F(x)=\int_x^0 \sqrt{1+w^4}\,dw$

H)

1. Se tiene una función continua que para toda x cumple la condición $\int_0^x f(t)\,dt=\frac{1}{2}\cos 2x + x\,sen\,2x + x^2 - \frac{1}{2}$, calcula: $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ y $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

R: $\left(\frac{\pi}{2}\right),(2-\pi)$.

2. Determina la derivada de $R(x)=\int_0^{x^3} sen^3 w\,dw$, haciendo $u=x^3$, $y=\int_0^u sen^3(w)\,dw$ y enseguida aplicar la regla de la cadena.

R: $3x^2\,sen^3 x^3$.

3. Calcula $H'(2)$ para $H(x)=\int_1^{x^2} \sqrt{9+w^2}\,dw$.

R: 20.

4. Obtén la derivada de $L(x)=\int_1^{\sqrt{x}} \tan w\,dw$.

R: $\frac{\tan\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$.

I) Utilizando la segunda parte del Teorema Fundamental del Cálculo o regla de Barrow, calcula:

1. $\int_1^3 4\,dx$ — R: 8.

2. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} sec^2 y\,dy$ — R: 1.

3. $\int_1^{e^3} \frac{dr}{r}$ — R: 3.

4. $\int_{-2}^{2} (3x^2+1)\,dx$ — R: 20.

5. $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{du}{1+u^2}$ — R: $\frac{\pi}{12}$.

6. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,dt$ — R: $\frac{1}{2}$.

J)

1. Prueba que $F(x)=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}sen\,2x+\frac{\pi}{3}$ es una primitiva de la función $G(x)=sen^2x$; a continuación calcula $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} G(x)dx$. R: $\frac{\pi+3\sqrt{3}-6}{24}$.

2. Demuestra que $L(v)=arc\tan(v+2)-\sqrt{3}$ es una antiderivada de $f(v)=\frac{1}{v^2+4v+5}$; después calcula $\int_{-2}^{-1} f(v)dv$. R: $\frac{\pi}{4}$.

3. Verifica que $N(\theta)=\tan\theta-\cot\theta+\frac{1}{3}$ es una primitiva de la función $L(\theta)=\frac{1}{sen^2\theta\cos^2\theta}$, posteriormente obtén $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{d\theta}{sen^2\theta\cos^2\theta}$. R: $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

4. Calcula $\int_0^{\pi} d\left(\cos^3 t\right)$. R: -2.

5. Dadas las funciones $T(\phi)=2\sqrt{\phi}\,ln\,\phi-4\sqrt{\phi}+e$ y $U(\phi)=\frac{ln\,\phi}{\sqrt{\phi}}$, demuestra que $T(\phi)$ es una primitiva de $U(\phi)$, después calcula: $\int_1^{e^2} U(\phi)d\phi$. R: 4.

6. Calcula $\int_{ln\,2}^{ln\,3} e^w dw$. R: 1.

K)

1. Sabiendo que $F(x)=\frac{x^2-4}{x^2+4}$ es una primitiva de $R(x)=\frac{mx}{(x^2+4)^2}$, determina el valor de la constante m.

R: $m=16$.

2. Si $p(t)=\frac{t^3}{3}-\frac{kt^2}{2}+7t$ es función primitiva de $V(t)$ y además $\int_0^2 V(t)dt=\frac{26}{3}$, determina la constante k.

R: $k=4$.

3. Considerando a $Q(x)=h\,ln\left|1+e^{-4x}\right|+h$ como función antiderivada de $F(x)=\frac{1}{e^{4x}+1}$, calcula la constante h. R: $h=-\frac{1}{4}$.

4.- Suponiendo que una antiderivada de $f(w)=\dfrac{2c}{\left(e^{2w}-e^{-2w}\right)^2}$ es $S(w)=\dfrac{e^{2w}+e^{-2w}}{e^{ew}-e^{-2w}}$, Obtén el valor de la constante c. R: $c=-4$.

5.- Tomando $N(y)=ln\left|\dfrac{\sqrt{y^2+9}+y}{\sqrt{y^2+9}-y}\right|$ como antiderivada de $R(y)=\dfrac{a}{\sqrt{9+y^2}}$, obtén el valor de a.

R: $a=2$.

CONTEXTO GEOMÉTRICO

A) Áreas

Determina el área de la región del plano limitada por:

1. La parábola con ecuación $x^2-7x-y+6=0$ y el eje $\overrightarrow{0x}$. R: $\dfrac{125}{6}u^2$.
2. La curva $y^3=x$ con los ejes de coordenadas y la recta $y+2=0$. R: $4u^2$.
3. La gráfica de la función $f(x)=6x^2-x^3-12x+8$ y los ejes de coordenadas. R: $4u^2$
4. La parábola cuya ecuación es $y^2-y+x-2=0$ y el eje $\overrightarrow{0y}$. R: $\dfrac{9}{2}u^2$.
5. La gráfica de la función $f(x)=x^3-7x^2+16x-12$ y los ejes de coordenadas. R: $\dfrac{27}{4}u^2$.
6. La parábola cuya ecuación es $3y-y^2-4=x$ con el eje vertical y las rectas $y=-1$ y $y=3$. R: $\dfrac{40}{3}u^2$.
7. La curva dada por $y=x^3+6x^2+12x+8$ con el eje horizontal y las rectas $x+4=0$; $x=0$. R: $8u^2$.
8. La curva dada por $y^2+2x-7=0$ con el eje vertical y las rectas $y+4=0$; $y-4=0$. R: $\left(\dfrac{28\sqrt{7}}{3}-\dfrac{20}{3}\right)u^2$.
9. La curva $y=x^3+3x^2+2x$ el eje horizontal y las rectas $x=-3$, $x=3$. R: $59u^2$.
10. La curva $y=ln(x+1)$ con el eje vertical y las rectas $y=-2$ y $y=2$. R: $\left(e^2-2+\dfrac{1}{e^2}\right)u^2$.
11. La parábola $x^2-2x-4y+5=0$ y la recta $3x-2y-5=0$. R: $\dfrac{1}{3}u^2$.
12. La parábola $y^2+2y-2x+7=0$ y la recta $x-y-8=0$. R: $18u^2$.
13. Las curvas con ecuaciones $y=3x-x^2$; $y=x^2-x$. R: $\dfrac{8}{3}u^2$.
14. Las curvas con ecuaciones $y^2=4-x$; $y^2=4-4x$. R: $8u^2$.

15. Las curvas representadas por $y = 2x^2 - 8x + 11$ y $y = x^2 - 4x + 11$. R: $\frac{32}{3}u^2$.

16. Las curvas dadas por $x = y^2 + 8y + 17$ y $x = 7 - 4y - y^2$. R: $\frac{64}{3}u^2$.

17. La curva $y = e^x$, $y = \sqrt{x}$, $x = 0$ y $x = 4$. R: $\left(e^4 - \frac{19}{3}\right)u^2$.

18. las curvas representadas por $2y^2 = x + 4$ y $x = y^2$. R: $\frac{32}{3}u^2$.

19. La recta $y - x - 2 = 0$ y la curva con ecuación $y = x^3 - 3x + 2$. R: $8u^2$.

20. Las curvas representadas por $y^2 = 4 + x$ y $y^2 + x = 2$. R: $8\sqrt{3}\,u^2$.

21. Las graficas de $\varphi(x) = sen\,x$, $\psi(x) = cos\,x$, $x = \frac{\pi}{2}$ y $x = 2\pi$. R: $\left(2 + 2\sqrt{2}\right)u^2$.

22. Las rectas $x - y + 1 = 0$, $7x - y - 17 = 0$ y $2x + y + 2 = 0$. R: $16u^2$.

23. La curva $y - x^3 = 0$ y las rectas $y - x = 6$ y $2y + x = 0$. R: $22u^2$.

B) Volúmenes.

Determina el volumen resultante de rotar el área de la región del plano limitada por:

24. La gráfica de la función $F(x) = x - x^2$, y el eje x, alrededor del eje del eje de las abscisas. R: $\frac{1}{30}\pi u^3$.

25. La grafica de la ecuación $x^{\frac{1}{3}} - y = 0$, el eje de las ordenadas y las rectas horizontales $y + 1 = 0$ y $y + 3 = 0$ alrededor del eje y. R: $\frac{2186}{7}\pi u^3$.

26. La grafica de la función $f(x) = \sqrt{x + 2}$ y los ejes de coordenadas en el segundo cuadrante alrededor del eje x. R: $2\pi u^3$.

27. La grafica de la función $f(x) = \frac{1}{x}$, el eje de las ordenadas y las rectas horizontales $y + 2 = 0$ y $y + 7 = 0$ alrededor del eje y. R: $\frac{5}{14}\pi u^3$.

28. La grafica de la ecuación $x^2 + y^2 = r^2$, el eje de las abscisas y las rectas verticales $x = r$ y $x = -r$ y la recta horizontal $y = 0$ al girar alrededor del eje x. R: $\frac{4}{3}\pi r^3 u^3$.

29. La grafica de la función $f(x) = x^3$, el eje de las ordenadas y las rectas horizontales $y - 1 = 0$ y $y - 8 = 0$ alrededor del eje y. R: $\frac{93}{5}\pi u^3$.

30. La grafica de la ecuación $x^2 - y + 1 = 0$, el eje de las abscisas y las rectas verticales $x + 2 = 0$ y $x - 2 = 0$ alrededor del eje x. R: $\frac{412}{15}\pi u^3$.

31. La grafica de la ecuación $y^2 + 2 - x = 0$, el eje de las ordenadas y las rectas horizontales $y + 2 = 0$ y $y - 2 = 0$ alrededor del eje y. R: $\frac{752}{15}\pi u^3$.

32. La grafica de la función $f(x) = x^3 - 4x$, el eje de las abscisas y las rectas verticales $x + 1 = 0$ y $x - 1 = 0$ alrededor del eje x. R: $\frac{814}{105}\pi u^3$.

33. La grafica de la función $f(x) = ln(x)$, el eje de las ordenadas y las rectas horizontales $y = 0$ y $y - 2 = 0$ alrededor del eje y. R: $\frac{e^4 - 1}{2}\pi u^3$.

34. Las graficas de las ecuaciones $x^2 = y - 2$ y $2y - x - 2 = 0$ y las rectas verticales $x = 0$ y $x - 1 = 0$ gira alrededor del eje x. R: $\frac{79}{20}\pi u^3$.

35. Las graficas de las ecuaciones $y = \frac{1}{8}x^3$ y $y = 2x$ giran alrededor del eje y. R: $\frac{1024}{15}\pi u^3$.

36. Las ecuaciones $x^2 = y$ y $y - x - 2 = 0$ giran alrededor del eje x. R: $\frac{72}{5}\pi u^3$.

37. Las ecuaciones $x = y^2$ y $y - x + 2 = 0$ giran alrededor del eje y. R: $\frac{72}{5}\pi u^3$.

38. Las ecuaciones $y = 2x$ y $y = 4x^2$ giran el rededor del eje y. R: $\frac{1}{24}\pi u^3$.

39. Las graficas de las ecuaciones $y = x^2$ y $y = 4 - x^2$ giran el rededor del eje x. R: $\frac{64\sqrt{2}}{3}\pi u^3$.

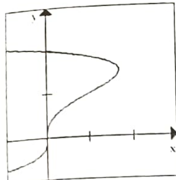
40.- Las graficas cuyas ecuaciones son $\frac{1}{4}y^2 = x + 2$ y $y^2 = x + 3$ gira alrededor del eje y. R: $\frac{112\sqrt{3}}{27}\pi u^3$.

41. Las graficas de las ecuaciones $\frac{1}{4}x^2 = y + 2$ y $x^2 = y + 3$ giran alrededor del eje x. R: $\frac{112\sqrt{3}}{27}\pi u^3$.

42. Las curvas: $x - 2y = 0$; $y^2 - 2x = 0$, alrededor del eje x. R: $\frac{64}{3}\pi u^3$.

43. Las gráficas de $y = x^2$ y $y = x + 2$ giran alrededor de la recta $x = 3$. R: $\frac{45}{2}\pi u^3$.

44. La gráfica de la ecuación $x = 2y^3 - y^4$ y el primer cuadrante alrededor del eje x. R: $\frac{64}{15}\pi u^3$.



INTEGRALES DE FUNCIONES TRIGONOMETRÍCAS

Las funciones trigonométricas se clasifican en dos clases: directas e inversas, cada tipo requiere de un procedimiento determinado para integrarse, las directas emplean las fórmulas de la número 8 a la 17; no se contemplan fórmulas para integrar funciones trigonométricas inversas, lo que se observa son tres fórmulas que dan como resultado funciones trigonométricas inversas, nos referimos a las del número 18 a la 20. El formulario al que se hace referencia es el que se incluye en el material.

En las integrales de funciones trigonométricas directas se aplicarán las identidades trigonométricas fundamentales, así como de las del ángulo doble y ángulo mitad. El dominio de esta técnica se obtiene a través de la práctica y los antecedentes del curso de geometría y trigonometría; en esta sección aplicaremos sólo las identidades fundamentales, porque el argumento de las funciones trigonométricas involucradas en la integral es el mismo.

Ejemplo: $\int (\csc 2h - \tan 2h)^2\, dh$.

Solución.- Previa discriminación de fórmula $\left(\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C\right)$ mediante la verificación de la diferencial, la función por integrar se transforma al desarrollar el producto notable que tiene $\left((a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2\right)$, para posteriormente separar cada miembro de la integral con la fórmula $\left(\int (u \pm v)dx = \int u\,dx \pm \int v\,dx\right)$ y la fórmula $\left(\int k\,u\,du = k\int u\,du\right)$ en el segundo término.

$$\int \left(\csc^2 2h - 2\csc 2h \tan 2h + \tan^2 2h\right) dh = \int \csc^2 2h\, dh - 2\int \csc 2h \tan 2h\, dh + \int \tan^2 2h\, dh$$

Analizando cada término en el desarrollo del binomio, se observa que la primer es inmediata, se cuenta con fórmula, sólo se verificará que esté completa la diferencial, para los otros dos términos no hay fórmula de referencia, entonces se aplican las identidades trigonométricas para transformarlas hasta reconocer o identificar alguna de las fórmulas incluidas en el formulario básico.

En el primer término hacemos u igual al argumento de la función trigonométrica, en el segundo término transformando las funciones a senos y cosenos, y en la tercera aplicamos una identidad pitagórica para expresar la tangente en términos de secante.

$$u = 2h \qquad du = 2dh \qquad \frac{du}{2} = dh$$

$$\csc 2h \tan 2h = \frac{1}{\operatorname{sen} 2h}\frac{\operatorname{sen} 2h}{\cos 2h} = \frac{\operatorname{sen} 2h}{\operatorname{sen} 2h \cos 2h} = \frac{1}{\cos 2h} = \sec 2h \quad ; \quad \tan^2 2h = \sec^2 2h - 1$$

Al sustituir respectivamente, se obtiene:

$$=\int csc^2 u\frac{du}{2}-2\int sec\,2h\,dh+\int\left(sec^2 2h-1\right)dh$$

En el primer término se extrae el factor, en el segundo ya corresponde a una fórmula de integración, únicamente verificamos que la diferencial este completa, al final se separan en dos integrales lo cual corresponde a cada término que resultó de aplicar la identidad trigonométrica en la tercera integral del desarrollo inicial

$$=\frac{1}{2}\int csc^2 u\,du-2\int sec\,u\frac{du}{2}+\int sec^2 2h\,dh-\int dh$$
$$=\frac{1}{2}\int csc^2 u\,du-\frac{2}{2}\int sec\,u\,du+\int sec^2 u\frac{du}{2}-\int dh$$
$$=\frac{1}{2}\int csc^2 u\,du-\int sec\,u\,du+\frac{1}{2}\int sec^2 u\,du-\int dh$$

Para el primer término aplicamos la fórmula $\left(\int csc^2 u\,du=-cot\,u+C\right)$, en el segundo $\left(\int sec\,u\,du=ln|sec\,u+tan\,u|+C\right)$, en el tercero $\left(\int sec^2 u\,du=tan\,u+C\right)$ y en el cuarto la fórmula $\left(\int du=u+C\right)$; recordar que la constante al final representa la suma de las constantes que se obtienen en cada integral.

$$=\frac{1}{2}(-cot\,u)-ln|sec\,u+tan\,u|+\frac{1}{2}tan\,u-h+c$$

Al Sustituir $u=2h$, se obtiene:

$$=-\frac{1}{2}cot\,2h-ln|sec\,2h+tan\,2h|+\frac{1}{2}tan\,2h-h+c$$

Por lo tanto: $\int(csc\,2h-tan\,2h)^2\,dh=\frac{1}{2}tan\,2h-\frac{1}{2}cot\,2h-ln|sec\,2h+tan\,2h|-h+c$

Para argumentos diferentes de funciones trigonométricas, tal que uno es el doble del otro o uno la mitad del otro, empleamos las identidades de ángulo mitad o ángulo doble; si los ángulos no guardan esta relación es posible integrarse por el método de "por partes" o la aplicación de otras identidades.

Ejercicios:

1. $\int\frac{4w\,sec^2\sqrt{1+w^2}}{\sqrt{1+w^2}}dw$ R: $4\,tan\sqrt{1+w^2}+c$.
2. $\int\frac{cos\sqrt[3]{1-3x}}{\sqrt[3]{(1-3x)^2}}dx$ R: $-sen\sqrt[3]{1-3x}+c$.
3. $\int sec\frac{x}{5}\left(sec\frac{x}{5}-tan\frac{x}{5}\right)dx$ R: $5\,tan\frac{1}{5}x-5\,sec\frac{1}{5}x+c$
4. $\int csc^4 6x\,cot\,6x\,dx$ R: $-\frac{1}{24}csc^4 6x+c$.
5. $\int\left(1+cot^2\frac{3\theta}{4}\right)d\theta$ R: $-\frac{4}{3}cot\frac{3}{4}\theta+c$
6. $\int\frac{dt}{sec\,(5t+1)}$ R: $\frac{1}{5}sen\,(5t+1)+c$
7. $\int\frac{e^{2x}}{sen\,e^{2x}}dx$ R: $ln\sqrt{\left|csc\,e^{2x}-cot\,e^{2x}\right|}+c$.

8. $\int \frac{d\rho}{(1+\cot 4\rho)\,sen^2 4\rho}$ R: $ln\frac{1}{\sqrt[4]{|1+\cot 4\rho|}}+c$.

9. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cot\varphi}\ sen^2\varphi}$ R: 2.

10. $\int \frac{\csc^5 x}{\sec x}dx$ R: $-\frac{1}{4}\csc^4 x+c$.

11. $\int \frac{\tan x \sec x}{\sqrt{\sec^2 x-1}}dx$ R: $ln|\tan x+\sec x|+c$.

12. $\int \frac{e^{2x}}{\cot e^{2x}\cos e^{2x}}dx$ R: $\frac{1}{2}\sec e^{2x}+c$.

13. $\int \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\cot e^{\frac{x}{2}}\ \csc e^{\frac{x}{2}}}dx$ R: $ln\left(\sec e^{\frac{1}{2}x}+\tan e^{\frac{1}{2}x}\right)^2-2sen\, e^{\frac{1}{2}x}+c$.

14. $\int \frac{\tan 2t}{\sec^4 2t}dt$ R: $-\frac{1}{8}\cos^4 2t+c$.

15. $\int \frac{\tan\theta}{1+\tan^2\theta}d\theta$ R: $\frac{1}{2}sen^2\theta+c$; $-\frac{1}{2}\cos^2\theta+c$.

16. $\int \frac{\cot\mu}{\csc^4\mu}d\mu$ R: $\frac{1}{4}sen^4\mu+c$.

17. $\int \frac{dy}{\csc y-\cot y}$ R: $ln|1-\cos y|+c$.

18. $\int \frac{sen(\pi-x)+\cos(\pi-x)}{\cos^3(\pi-x)}dx$ R: $-\frac{1}{2}\sec^2(\pi-x)-\tan(\pi-x)+c$; $-\tan(\pi-x)\left(\frac{1}{2}\tan(\pi-x)-1\right)+c$.

19. $\int \frac{3-2\cot^2 x}{\cos^2 x}dx$ R: $3\tan x+2\cot x+c$.

20. $\int \frac{\tan 3w-\cot 3w}{sen\,3w}dw$ R: $ln\sqrt[3]{|\sec 3w+\tan 3w|}+\frac{1}{3}\csc 3w+c$.

21. $\int \frac{\cot\varepsilon-\tan\varepsilon}{\cos\varepsilon}d\varepsilon$ R: $ln|\csc\varepsilon-\cot\varepsilon|-\sec\varepsilon+c$.

22. $\int \sec^2\frac{2w-3}{5}\left[1+\cos^2\frac{2w-3}{5}\right]dw$ R: $\frac{5}{2}\tan\frac{2w-3}{5}+w+c$.

23. $\int (1+\tan^2 r)\csc^2 r\,dr$ R: $\tan r-\cot r+c$.

24. $\int (1-\cot^2 x)\sec^2 x\,dx$ R: $\tan x+\cot x+c$.

25. $\int \left(2+\csc\frac{x}{3}\right)^2 dx$ R: $4x+ln\left(\csc\frac{1}{3}x-\cot\frac{1}{3}x\right)^{12}-3\cot\frac{1}{3}x+c$.

26. $\int\left(\cos\frac{t}{4}-\operatorname{sen}\frac{t}{4}\right)^2 dt$ R: $t-4\operatorname{sen}^2\frac{1}{4}t+c$; $t+4\cos^2\frac{1}{4}t+c$.

27. $\int(\cot 2\psi-\tan 2\psi)^2 d\psi$ R: $\frac{1}{2}\tan 2\psi-\frac{1}{2}\cot 2\psi-4\psi+c$.

28. $\int\left(\csc\frac{x}{a}+\cot\frac{x}{a}\right)^2 dx$ R: $-x-2a\cot\frac{1}{a}x-2a\csc\frac{1}{a}x+c$.

29. $\int(1-\cot 3x)^2 dx$ R: $\ln\sqrt[3]{\csc^2 3x}-\frac{1}{3}\cot 3x+c$.

30. $\int\frac{(\cos aw+\operatorname{sen} aw)^2}{\operatorname{sen} aw}dw$ R: $\ln\sqrt[a]{|\csc aw-\cot aw|}+\frac{2}{a}\operatorname{sen} aw+c$.

31. $\int\frac{\operatorname{sen}^3\theta}{\cos\theta-1}d\theta$ R: $\cos\theta-\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\theta+c$; $\frac{1}{2}\cos^2\theta+\cos\theta+c$.

Ejemplo: $\int\frac{\operatorname{sen} 4t}{1-\operatorname{sen}^2 2t}dt$

Solución.- Primero se uniformizan los argumentos de las funciones trigonométricas, aplicando las identidades, de tal forma que todos sean $4t$ o $2t$, una vez realizado este paso se identifica la fórmula específica analizando el diferencial, de no corresponder a la fórmula se aplican identidades fundamentales para transformar la función por integrar.

Caso 1: (con argumento: 4t)

Por lo tanto al aplicar la identidad de ángulo mitad para el seno del denominador, la integral se transforma en:

$$\int\frac{\operatorname{sen} 4t}{1-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 4t\right)}dt=\int\frac{\operatorname{sen} 4t}{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 4t}dt=\int\frac{\operatorname{sen} 4t}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 4t}dt$$

$$=\int\frac{\operatorname{sen} 4t}{\frac{1}{2}(1+\cos 4t)}dt$$

$$=\int\frac{2\operatorname{sen} 4t}{1+\cos 4t}dt$$

Al considerar al denominador como $u=1+\cos 4t$, la diferencial resulta:

$$du=-4\operatorname{sen} 4t\,dt$$

Dividiendo entre -4 ambos miembros de la diferencial: $-\frac{du}{4}=\operatorname{sen} 4t\,dt$, para sustituir el valor de u y du en la integral: $2\int\frac{\operatorname{sen} 4t}{1+\cos 4t}dt$ .se transforma en la siguiente integral:

$$=2\int\frac{-\frac{du}{4}}{u}$$

Posteriormente se aplica la fórmula $\left(\int k\,u\,du = k\int u\,du\right)$ y después la fórmula $\left(\int \frac{du}{u} = ln|u| + C\right)$.

$$= -\frac{2}{4}\int \frac{du}{u}$$

$$-\frac{1}{2}ln|u| + c$$

Al sustituir a u para retomar la variable inicial y al aplicar las propiedades de los logaritmos y leyes de los exponentes se obtiene:

$$= ln|1 + cos\,4t|^{-\frac{1}{2}} + c = ln\frac{1}{|1 + cos\,4t|^{\frac{1}{2}}} + c = ln\frac{1}{\sqrt{|1 + cos\,4t|}} + c$$

Por lo tanto: $\int \frac{sen\,4t}{1 - sen^2 2t}dt = ln\frac{1}{\sqrt{|1 + cos\,4t|}} + c$

Caso 2:(con argumento: 2t)

Se aplica la identidad de ángulo doble para la función seno, observa entonces en la integral la expresión en el numerador:

$$\int \frac{2\,sen\,2t\,cos\,2t}{1 - sen^2 2t}dt$$

Si al denominador se considera como $u = 1 - sen^2\,2t$, su diferencial es:

$$du = -4\,sen\,2t\,cos\,2t\,dt$$

Entonces se Aplica la fórmula $\left(\int k\,u\,du = k\int u\,du\right)$ en la integral y al dividir entre 4 ambos lados de la igualdad de la diferencial, resulta:

$$\frac{du}{4} = sen\,2t\,cos\,2t\,dt$$

Al sustituir los valores de u y du en la integral:

$$2\int \frac{sen\,2t\,cos\,2t}{1 - sen^2 2t}dt$$

Se expresa como:

$$2\int \frac{\frac{du}{4}}{u}$$

Al aplicar la fórmula $\left(\int k\,u\,du = k\int u\,du\right)$ y la fórmula $\left(\int \frac{1}{u}du = ln\,u + c\right)$, se obtiene:

$$= \frac{2}{4}\int \frac{du}{u}$$
$$= \frac{1}{2} ln|u| + c$$

Al Sustituir $u = 1 - sen^2 2t$ en función de la variable inicial, aplicar las propiedades de los logaritmos y leyes de los exponentes, se obtiene:

$$= ln|1 - sen^2 2t|^{\frac{1}{2}} + c$$
$$= ln\sqrt{|1 - sen^2 2t|} + c$$

Por lo tanto: $\int \frac{sen\, 4t}{1 - sen^2 2t} dt = ln\sqrt{|1 - sen^2 2t|} + c$

Caso 3.

Al expresar en función de un mismo argumento $(2t)$ y aplicar identidades fundamentales pitagóricas en la función del denominador, la integral se transforma en la siguiente integral:

$$\int \frac{2sen\, 2t \cos 2t}{\cos^2 2t} dt =$$

Simplificada y aplicando nuevamente identidades fundamentales (de cociente), resulta:

$$= \int \frac{2sen\, 2t}{\cos 2t} dt$$
$$= \int 2 \tan 2t\, dt$$

Considerando a $u = 2t$ como el argumento de la función tangente, obtenemos su diferencial: $du = 2dt$

Al sustituir en la integral e integrando con la fórmula $\left(\int \tan u\, du = ln|\sec u| + C\right)$, se obtiene:

$$\int \tan u\, du = ln|\sec u| + c$$

Si $u = 2t$, entonces:

$$\int \frac{sen\, 4t}{1 - sen^2 2t} dt = ln|\sec 2t| + c$$

Ejercicios:

1. $\int sen^2 \frac{t}{2} dt$ — R: $\frac{1}{2}t - \frac{1}{2} sen\, t + c$.
2. $\int \frac{\cos 2\phi}{\csc 2\phi} d\phi$ — R: $-\frac{1}{8}\cos 4\phi + c$
3. $\int \frac{1}{\sec^2 3n} dn$ — R: $\frac{1}{2}n + \frac{1}{12} sen\, 6n + c$.
4. $\int \left(sen^2 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2} \right) dx$ — R: $-sen\, x + c$

5. $\int \frac{2\tan\frac{2y}{3}}{1-\tan^2\frac{2y}{3}}dy$ R: $\ln\sqrt[4]{\left|\sec^3\frac{4}{3}y\right|}+c$

6. $\int\sqrt{1-\cos 3\theta}\,d\theta$ R: $-\frac{2\sqrt{2}}{3}\cos\frac{3}{2}\theta+c$.

7. $\int\sqrt{\cos 4t+1}\,dt$ R: $\frac{\sqrt{2}}{2}sen\,2t+c$

8. $\int\frac{sen\,2\mu}{\sqrt{1+sen^2\mu}}d\mu$ R: $2\sqrt{1+sen^2\mu}+c$ / $\sqrt{6-2\cos 2\mu}+c$.

9. $\int\frac{1}{1+\cos\frac{\Omega}{2}}d\Omega$ R: $2\tan\frac{1}{4}\Omega+c$.

10. $\int\frac{1}{1-\cos 3x}dx$ R: $-\frac{1}{3}\cot\frac{3}{2}x+c$.

11. $\int\frac{1+sen^2x}{1-\cos 2x}dx$ R: $\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\cot x+c$.

12. $\int\frac{1}{sen^2x\cos^2x}dx$ R: $\tan x-\cot x+c$ / $-2\cot 2x+c$.

13. $\int\frac{1}{sen\,3x\cos 3x}dx$ R: $\ln\sqrt[3]{|\csc 6x-\cot 6x|}+c$ / $\ln\sqrt[3]{|\tan 3x|}+c$.

14. $\int\frac{1}{\cos 2y-\cos^2y}dy$ R: $\cot y+c$.

15. $\int\frac{sen\,3x}{25+sen^2\frac{3x}{2}}dx$ R: $\ln\sqrt[3]{\left(25+sen^2\frac{3}{2}x\right)^2}+c$ / $\ln\sqrt[3]{(51-\cos 3x)^2}+c$.

16. $\int\frac{sen^2\frac{x}{2}}{1-\cos^2x}dx$ R: $\frac{1}{2}\csc x-\frac{1}{2}\cot x+c$ / $\frac{1}{2}\tan\frac{1}{2}x+c$.

17. $\int\sqrt[3]{sen^22x}\,sen4x\,dx$ R: $\frac{3}{8}sen^22x\sqrt[3]{sen^22x}+c$ / $\frac{3\sqrt[3]{4}}{32}(1-\cos 4x)\sqrt[3]{1-\cos 4x}+c$.

18. $\int\frac{\tan 3w}{sen6w}dw$ R: $\frac{1}{6}\tan 3w+c$.

19. $\int\left(\cos^4w-sen^4w\right)dw$ R: $\frac{1}{2}sen\,2w+c$.

20. $\int\frac{\cos\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{4}-sen\frac{x}{4}}dx$ R: $4sen\frac{1}{4}x-4\cos\frac{1}{4}x+c$.

21. $\int \frac{1}{\sqrt{1+\cos\frac{\varepsilon}{2}}}\,d\varepsilon$ R: $\sqrt{2}\,\ln\left(\sec\frac{1}{4}\varepsilon+\tan\frac{1}{4}\varepsilon\right)^2+c$.

22. $\int \frac{\cos 5\theta}{\cot\frac{5\theta}{2}-\tan\frac{5\theta}{2}}\,d\theta$

$-\frac{1}{10}\cos 5\theta+c$

R: $-\frac{1}{5}\cos^2\frac{5}{2}\theta+c$

$\frac{1}{5}\sen^2\frac{5}{2}\theta+c$

23. $\int\left(1+\tan^2 r\right)\csc^2 r\,dr$ R: $-2\cot 2r+c$.

24. $\int\left(\cot 2\psi-\tan 2\psi\right)^2 d\psi$ R: $-\cot 4\psi-4\psi+c$.

25. $\int\left(\cos\frac{t}{4}-\sen\frac{t}{4}\right)^2 dt$ R: $t+2\cos\frac{1}{2}t+c$.

26. $\int \frac{\cos 6x}{\left(\cos 3x+\sen 3x\right)^2}\,dx$ R: $\ln\sqrt[3]{\left|\cos 3x+\sen 3x\right|}+c$.

27. $\int \frac{1+\tan^2 y}{1-\tan^2 y}\,dy$ R: $\ln\sqrt{\left|\sec 2y+\tan 2y\right|}+c$.

28. $\int \frac{1}{\sen 2x\,\ln\tan x}\,dx$ R: $\ln\sqrt{\left|\ln\tan x\right|}+c$.

29. $\int \frac{\sen^3\theta}{\cos\theta-1}\,d\theta$ R: $\cos\theta+\frac{1}{4}\cos 2\theta+c$.

Las integrales cuyo resultado se expresa mediante funciones trigonométricas inversas, presentan en su integrando: una suma de cuadrados $\left[\left(u^2+a^2\right);\ \text{donde } a \text{ es una constante}\right]$, diferencia de cuadrados dentro del radical $\left(\sqrt{a^2-u^2}\right)$ o el producto de una variable por la raíz cuadrada de una diferencia de cuadrados $\left(u\sqrt{u^2-a^2}\right)$.
No olvides que cuentas con recursos algebraicos para transformar la integral a inmediatas, aunado al proceso de identificar a la función y su diferencial para verificar que esté completa.

Ejemplos:

1) $\int \frac{e^{\cos 3\theta}\sen 3\theta}{5+e^{2\cos 3\theta}}\,d\theta$

Solución.- Observa que en el denominador se tiene una suma de cuadrados $\left(u^2+a^2\right)$ si se considera: $\left(e^{\cos 3\theta}\right)^2$ y $\left(\sqrt{5}\right)^2$; por lo tanto la integral se expresa de la siguiente forma:

$$\int \frac{e^{\cos 3\theta}\sen 3\theta}{\left(\sqrt{5}\right)^2+\left(e^{\cos 3\theta}\right)^2}\,d\theta$$

Si $u=e^{\cos 3\theta}$, $a=\sqrt{5}$, además se verifica que la diferencial este completa.

$$u=e^{\cos 3\theta}$$
$$du=-3e^{\cos 3\theta}\sen 3\theta\,d\theta$$

Al dividir ambos miembros entre -3 y sustituir en la integral:

$$-\frac{du}{3}=e^{\cos 3\theta}\,sen\,3\theta\,d\theta$$

$$\int\frac{-\frac{du}{3}}{a^2+u^2}$$

Aplicando la fórmula$\left(\int k\,u\,du=k\int u\,du\right)$ y después $\left(\int\frac{1}{a^2+u^2}du=\frac{1}{a}arc\tan\frac{u}{a}+C\right)$, se obtiene respectivamente:

$$=-\frac{1}{3}\int\frac{du}{a^2+u^2}$$

$$=-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a}arc\tan\frac{u}{a}\right)+c$$

Sustituyendo los valores de u y a en términos de la variable inicial, así como el valor numérico de a y simplificando resulta:

$$=-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}arc\tan\frac{e^{\cos 3\theta}}{\sqrt{5}}\right)+c$$

$$=-\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{5}}{5}arc\tan\left(\frac{\sqrt{5}}{5}e^{\cos 3\theta}\right)\right)+c$$

$$=-\frac{\sqrt{5}}{15}arc\tan\left(\frac{\sqrt{5}}{5}e^{\cos 3\theta}\right)+c$$

Por lo tanto: $\int\frac{e^{\cos 3\theta}\,sen\,3\theta}{5+e^{2\cos 3\theta}}d\theta=-\frac{\sqrt{5}}{15}arc\tan\left(\frac{\sqrt{5}}{5}e^{\cos 3\theta}\right)+c$

2) $\int\frac{3(1+3x)}{\sqrt{4-9x^2}}dx$

Solución.- En este caso se identifica la raíz cuadrada de una diferencia de cuadrados$\left(\sqrt{a^2-u^2}\right)$, primero aplicamos la fórmula $\left(\int k\,u\,du=k\int u\,du\right)$ y una propiedad de los números racionales $\left(\frac{a\pm b}{c}=\frac{a}{c}\pm\frac{b}{c}\right)$, posteriormente se aplica la fórmula para integrar una suma de funciones:

$$3\int\frac{1+3x}{\sqrt{4-9x^2}}dx=3\int\left(\frac{1}{\sqrt{4-9x^2}}+\frac{3x}{\sqrt{4-9x^2}}\right)dx$$

$$=3\int\frac{1}{\sqrt{4-9x^2}}dx+3\int\frac{3x}{\sqrt{4-9x^2}}dx$$

En la primera integral considera: $(3x)^2$ y $(2)^2$, y en el segunda: $u=4-9x^2$ y se verifica la diferencial.

$$du=-18x\,dx$$

$$= 3\int \frac{1}{\sqrt{(2)^2 - (3x)^2}} dx + 3\int \frac{3x}{\sqrt{4 - 9x^2}} dx$$

Para la primera: $v = 3x$, y $a = 2$, entonces: $dv = 3dx$

En la segunda integral, se dividen ambos miembros de la diferencial: $du = -18x\,dx$ entre -18 y se sustituye respectivamente.

$$= 3\int \frac{1}{\sqrt{(2)^2 - (3x)^2}} dx + 9\int \frac{-\frac{du}{18}}{\sqrt{u}}$$

A su vez:

$$\frac{dv}{3} = dx$$

$$= 3\int \frac{\frac{dv}{3}}{\sqrt{a^2 - v^2}} - \frac{9}{18}\int u^{-\frac{1}{2}} du$$

En la primera integral se aplica la fórmula $\left(\int k\,u\,du = k\int u\,du\right)$ y después la $\left(\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - u^2}} du = arc\,sen\,\frac{u}{a} + C\right)$:

$$= \frac{3}{3}\int \frac{dv}{\sqrt{a^2 - v^2}} - \frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{2}} du$$

Aplicando en la segunda integral la fórmula $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$, resulta:

$$arc\,sen\,\frac{v}{a} - \frac{1}{2}\left(\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right) + c$$

Al sustituir las expresiones : $v = 3x$, $u = 4 - 9x^2$ y $a = 2$, y simplificar, se obtiene:

$$= arc\,sen\,\frac{3x}{2} - \frac{1}{2}\left(2\left(4 - 9x^2\right)^{\frac{1}{2}}\right) + c$$

$$= arc\,sen\,\frac{3}{2}x - \sqrt{4 - 9x^2} + c$$

Por lo tanto: $\int \frac{3(1+3x)}{\sqrt{4 - 9x^2}} dx = arc\,sen\,\frac{3}{2}x - \sqrt{4 - 9x^2} + c$

3) $\int \frac{w^4 - 4w^2 + 1}{w\sqrt{w^2 - 4}} dw$

Solución.- En esta integral se identifica un producto de una variable por la raíz cuadrada de la diferencia de cuadrados $\left(u\sqrt{u^2-a^2}\right)$, pero primero en el numerador los elementos que tienen factor común, para después separar en 2 fracciones y se simplifican las integrales.

$$\int \frac{w^2\left(w^2-4\right)+1}{w\sqrt{w^2-4}}dw = \int\left(\frac{w^2\left(w^2-4\right)}{w\sqrt{w^2-4}}+\frac{1}{w\sqrt{w^2-4}}\right)dw$$

Al aplicar la fórmula$\left(\int(u\pm v)dx=\int u\,dx\pm\int v\,dx\right)$, resulta:

$$=\int w\sqrt{w^2-4}\,dw+\int\frac{1}{w\sqrt{w^2-4}}dw$$

Al analizar cada una de las integrales, es posible hacer el siguiente cambio de variable: $u=w^2-4$ y calculamos su diferencial, en la segunda directamente corresponde a la fórmula $\left(\int\frac{1}{u\sqrt{u^2-a^2}}du=\frac{1}{a}arc\sec\frac{u}{a}+C\right)$.

$$u=w^2-4$$
$$du=2w\,dw$$
$$\frac{du}{2}=w\,dw$$

Entonces en el resultado, la primera integral se expresa como:

$$\int\sqrt{u}\,\frac{du}{2}+\int\frac{dw}{w\sqrt{w^2-4}}$$
$$=\frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{2}}\,du+\int\frac{dw}{w\sqrt{w^2-4}}$$

Integrando ambas, resulta:

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)+\frac{1}{2}arc\sec\frac{w}{2}+c$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}u\,u^{\frac{1}{2}}\right)+\frac{1}{2}arc\sec\frac{w}{2}+c$$
$$=\frac{1}{3}\left(w^2-4\right)\sqrt{w^2-4}+\frac{1}{2}arc\sec\frac{w}{2}+c$$

Por lo tanto: $\displaystyle\int\frac{w^4-4w^2+1}{w\sqrt{w^2-4}}dw=\frac{1}{3}\left(w^2-4\right)\sqrt{w^2-4}+\frac{1}{2}arc\sec\frac{w}{2}+c$

Ejercicios:

1. $\int \frac{sen\frac{x}{2}}{9+sen^4\frac{x}{4}}dx$ R: $\frac{4}{3}arc\tan\left(\frac{1}{3}sen^2\frac{1}{4}x\right)+c$.

2. $\int \frac{1}{4w+w\ln^2 w}dw$ R: $\frac{1}{2}arc\tan \ln\sqrt{w}+c$.

3. $\int \frac{e^{2x}+e^x}{e^{2x}+3}dx$ R: $Ln\sqrt{|e^{2x}+3|}+\frac{\sqrt{3}}{3}arc\tan\frac{\sqrt{3}}{3}e^x+c$

$x+\frac{\sqrt{3}}{3}arc\tan\frac{\sqrt{3}}{3}e^x-\ln\sqrt{|1-3e^{-2x}|}+c$

4. $\int \frac{arc\tan x+x\ln(1+x^2)+1}{1+x^2}dx$ R: $\frac{1}{2}arc\tan^2 x+\frac{1}{4}\ln^2(1+x^2)+arc\tan x+c$.

5. $\int \frac{x^2-5x+3}{x^2+4}dx$ R: $x+\ln\frac{1}{\sqrt{|x^2+4|^5}}-\frac{1}{2}arc\tan\frac{x}{2}+c$.

6. $\int \frac{2x^4-x^2}{2x^2+1}dx$ R: $\frac{1}{3}x^3-x+\frac{\sqrt{2}}{2}arc\tan\sqrt{2}x+c$.

7. $\int \frac{1}{sen^2 x\sqrt{1-4\cot^2 x}}dx$ R: $-\frac{1}{2}arc\,sen(2\cot x)+c$.

8. $\int \frac{5}{z\sqrt{3-\ln^2 z^2}}dz$ R: $\frac{5}{2}arc\,sen\left(\frac{\sqrt{3}}{3}Ln\,z^2\right)+c$.

9. $\int \frac{\sec x\tan x}{\sqrt{1-\sec^2 x}}dx$ R: $arc\,sen(\sec x)+c$.

10. $\int \frac{x-2}{\sqrt{3-x^2}}dx$ R: $-\sqrt{3-x^2}-2arc\,sen\frac{\sqrt{3}}{3}x+c$.

11. $\int \frac{arc\,sen\frac{y}{2}+y+1}{\sqrt{4-y^2}}dy$ R: $\frac{1}{2}arc\,sen^2\frac{1}{2}y-\sqrt{4-y^2}+arc\,sen\frac{1}{2}y+c$.

12. $\int \frac{dy}{y\ln y\sqrt{\ln^2 y-4}}$ R: $\frac{1}{2}arc\sec(\ln\sqrt{y})+c$

13. $\int \frac{3dr}{r\sqrt{9r^2-1}}$ R: $arc\sec 3r+c$

14. $\int \frac{2+x^2}{x\sqrt{x^2-4}}dx$ R: $arc\sec\frac{x}{2}+\sqrt{x^2-4}+c$.

15. $\int \frac{arc\sec\frac{2}{3}\theta-4\theta^2+3}{\theta\sqrt{4\theta^2-9}}d\theta$ R: $\frac{1}{6}arc\sec^2\frac{2}{3}\theta-\sqrt{4\theta^2-9}+\frac{1}{3}arc\sec\frac{2}{3}\theta+c$

ARTIFICIOS DE INTEGRACIÓN

Los artificios de integración permiten transformar una integral a una forma inmediata ante la imposibilidad de reducirse a inmediata mediante un proceso algebraico o aplicando identidades trigonométricas dependiendo de la función a integrar o bien como otra alternativa.



Los artificios varían dependiendo de la integral, lo importante es identificar cual es el adecuado, recuerda que la práctica da como resultado la experiencia para este propósito; algunos artificios que se tratarán son: equilibrar una integral con constantes que suman o restan, la racionalización, multiplicar por la unidad (binomio conjugado: exponenciales o trigonométricos), en algunos casos alguna variable que falte (multiplicando denominador y numerador por dicha variable), completar trinomio cuadrado perfecto, entre otros.

A) Empleando algún tipo de artificio matemático calcular:

Ejemplo: $\int \frac{y}{(y-7)^5} dy$

Solución: si optamos porque la base sea la función, intentando aplicar la fórmula $\left(\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C\right)$, nos sobra la variable "y" en el numerador, tampoco es posible simplificarla algebraicamente mediante el desarrollo de la potencia la integral, incluso esto imposibilitaría la integración.

El procedimiento que se aplicó en las integrales inmediatas que consiste en equilibrar (multiplicando por la constante y el recíproco de ésta) la integral cuando le faltaba una constante negativa o positiva ya sea multiplicando o dividiendo o por el método de cambio de variable y sustitución; ahora se equilibrará la integral cuando la constante falte sumando o restando; en este proceso el equilibrio es que la suma o la resta nos dé cero para no modificar la integral.

Para este ejercicio sumamos y restamos 7 en el numerador; después separaremos la integral en dos fracciones con la propiedad correspondiente para simplificar la integral, como se muestra a continuación.

$$\int \frac{y-7+7}{(y-7)^5} dy = \int \left(\frac{y-7}{(y-7)^5} + \frac{7}{(y-7)^5} \right) dy$$

$$= \int \left((y-7)^{-4} + \frac{7}{(y-7)^5} \right) dy$$

Al aplicar la fórmula $\left(\int (u \pm v)dx = \int u\,dx \pm \int v\,dx\right)$, y transformar la potencia del denominador al numerador con el simétrico del exponente, se expresan como:

$$= \int (y-7)^{-4} dy + 7\int (y-7)^{-5} dy$$

La verificación de la diferencial considerando en ambas integrales a: $u = y - 7$ como la base de la función.

$$du = dy$$

Como las diferenciales de las integrales "están completas" procedemos a sustituir e integran empleando la fórmula $\left(\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C\right)$.

$$\int u^{-4} du + 7\int u^{-5} du = \left(\frac{u^{-3}}{-3}\right) + 7\left(\frac{u^{-4}}{-4}\right) + c$$

$$= -\frac{1}{3u^3} - \frac{7}{4u^4} + c$$

Al sustituir el valor de $u = y - 7$, retomando la variable inicial y simplificado se obtiene:

$$= -\frac{1}{(y-7)^3}\left(\frac{4(y-7)+21}{12(y-7)}\right)+c$$
$$= -\frac{1}{(y-7)^3}\left(\frac{1}{3}+\frac{7}{4(y-7)}\right)+c$$
$$= -\frac{1}{(y-7)^3}\left(\frac{4y-28+21}{12(y-7)}\right)+c$$

Por lo tanto: $\int \frac{y}{(y-7)^5}dy = -\frac{4y-7}{12(y-7)^4}+c$

Ejemplo: $\int \frac{1}{\sqrt{3w}+\sqrt{5+3w}}dw$

Solución: Este ejercicio presenta radicales que se suman en el denominador, aplicando la racionalización para transformar la fracción en otra equivalente.

$$= \int \frac{1}{\sqrt{3w}+\sqrt{5+3w}}\left(\frac{\sqrt{3w}-\sqrt{5+3w}}{\sqrt{3w}-\sqrt{5+3w}}\right)dw = \int \frac{\sqrt{3w}-\sqrt{5+3w}}{\left(\sqrt{3w}\right)^2-\left(\sqrt{5+3w}\right)^2}dw$$
$$= \int \frac{\sqrt{3w}-\sqrt{5+3w}}{3w-5-3w}dw$$
$$= \int \frac{\sqrt{3w}-\sqrt{5+3w}}{-5}dw$$

Dividiendo término a término las fracciones se separan y se aplican las fórmulas: $\left(\int k\,u\,du = k\int u\,du\right)$; $\left(\int (u \pm v)dx = \int u\,dx \pm \int v\,dx\right)$ y se expresan los radicales como exponentes fraccionarios.

$$= \int\left(-\frac{\sqrt{3w}}{5}+\frac{\sqrt{5+3w}}{5}\right)dw = \frac{1}{5}\int \sqrt{5+3w}\,dw - \frac{1}{5}\int \sqrt{3w}\,dw$$
$$= \frac{1}{5}\int (5+3w)^{\frac{1}{2}}dw - \frac{1}{5}\int (3w)^{\frac{1}{2}}dw$$

Al verificar los diferenciales, considerando los cambios de variable para la primera integral como: $u = 5+3w$ y $v = 3w$, con el propósito de aplicar la fórmula $\left(\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1}+C\right)$, se equilibran las integrales, procediendo:

$u = 5+3w$	$v = 3w$
$du = 3dw$	$dv = 3dw$
$\frac{du}{3} = dw$	$\frac{dv}{3} = dw$

Al sustituir los valores correspondientes en la integral, se obtiene:

$$\frac{1}{5}\int u^{\frac{1}{2}}\frac{du}{3} - \frac{1}{5}\int v^{\frac{1}{2}}\frac{dv}{3}$$

Con la aplicación de las fórmulas $\left(\int k\,u\,du = k\int u\,du\right)$ y $\left(\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C\right)$ para integrar y al sustituir los valores de u y v para retomar la variable inicial y posteriormente simplificar el resultado se obtiene, siguiendo los pasos dados a continuación:

$$\frac{1}{15}\int u^{\frac{1}{2}}du - \frac{1}{15}\int v^{\frac{1}{2}}dv = \frac{1}{15}\left(\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right) - \frac{1}{15}\left(\frac{v^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right) + c$$

$$= \frac{1}{15}\left(\frac{2}{3}u\,u^{\frac{1}{2}}\right) - \frac{1}{15}\left(\frac{2}{3}v\,v^{\frac{1}{2}}\right) + c$$

$$= \frac{2}{45}(5+3w)(5+3w)^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{45}(3w)(3w)^{\frac{1}{2}} + c$$

Por lo tanto: $\int \frac{1}{\sqrt{3w}+\sqrt{5+3w}}dw = \frac{2}{45}(5+3w)\sqrt{5+3w} - \frac{2}{15}w\sqrt{3w} + c$

Ejemplo: $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^6-1}}$

Solución: La estructura algebraica de la integral tiene similitud con el patrón establecido en la fórmula $\left(\int \frac{1}{u\sqrt{u^2-a^2}}du = \frac{1}{a}arc\sec\frac{u}{a} + C\right)$, por lo tanto se expresa como: $\int \frac{dx}{x\sqrt{(x^3)^2-(1)^2}}$

Al escribirla de esta forma, la variable que multiplica al radical, para aplicar directamente la fórmula, se requiere que sea x^3, ahora hacemos $u = x^3$, y obtenemos su diferencial.

$$du = 3x^2dx$$

$$\frac{du}{3} = x^2dx$$

Observamos que hace falta la variable x al cuadrado en el numerador, al multiplicar por la unidad (multiplicando por x^2 el numerador y el denominador).

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{(x^3)^2-(1)^2}}\left(\frac{x^2}{x^2}\right) = \int \frac{x^2dx}{x^3\sqrt{(x^3)^2-(1)^2}}$$

Sustituimos los datos en la integral y aplicamos las fórmulas $\left(\int k\,u\,du = k\int u\,du\right)$ y $\left(\int \frac{1}{u\sqrt{u^2-a^2}}du = \frac{1}{a}arc\sec\frac{u}{a} + C\right)$ para integrar, entonces:

$$\int \frac{\frac{du}{3}}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a}arc\sec\frac{u}{a}\right) + c$$

Al Sustituir los valores de $u = x^3$ y $a = 1$; y simplificar se obtiene:

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1}arc\sec\frac{x^3}{1}\right)+c$$

Por lo tanto: $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^6-1}}=\frac{1}{3}arc\sec x^3+c$

Ejemplo: $\int\frac{1}{e^{-4y}-1}dy$

Solución: La integral no es posible reducirla algebraicamente a la inmediata $\left(\int\frac{du}{u}=ln|u|+C\right)$, por lo que al considerar al denominador como la nueva variable y obtener la diferencial:

$$u=e^{-4y}-1$$
$$du=-4e^{-4y}dy$$
$$-\frac{du}{4}=e^{-4y}dy$$

Hace falta la función exponencial e^{-4y}, por lo tanto se transforma la integral, siguiendo dos procedimientos para este caso.

En el primero se aplican las leyes de los exponentes, se efectúan las operaciones con las fracciones y después se simplifica el integrando; en el segundo se multiplica por la unidad (el numerador y denominador por la potencia con el exponente simétrico).

PROCEDIMIENTO 1

$$\frac{1}{\frac{1}{e^{4y}}-1}=\frac{1}{\frac{1-e^{4y}}{e^{4y}}}$$

$$=\frac{e^{4y}}{1-e^{4y}}$$

PROCEDIMIENTO 2

$$\frac{1}{e^{-4y}-1}\left(\frac{e^{4y}}{e^{4y}}\right)=\frac{e^{4y}}{e^{0}-e^{4y}}$$

$$=\frac{e^{4y}}{1-e^{4y}}$$

Ya simplificada la función integrando, se procede a verificar la diferencial con el cambio de variable y sustitución en la integral , de acuerdo con los siguientes pasos:

$$\int\frac{e^{4y}}{1-e^{4y}}dy$$
$$si\quad u=1-e^{4y}$$

Entonces:

$$du=-4e^{4y}dy$$
$$-\frac{du}{4}=e^{4y}dy$$

Al sustituir en la integral, se aplican las fórmulas $\left(\int ku\,du=k\int u\,du\right)$ y $\left(\int\frac{du}{u}=ln|u|+C\right)$; después de integrar se sustituye el valor de $si\quad u=1-e^{4y}$, de acuerdo con la siguiente secuencia:

$$\int \frac{-\frac{du}{4}}{u} = -\frac{1}{4}\int \frac{du}{u} = -\frac{1}{4}ln|u| + c$$

$$= ln|1-e^{4y}|^{-\frac{1}{4}} + c$$

$$= ln\frac{1}{|1-e^{4y}|^{\frac{1}{4}}} + c$$

Por lo tanto: $\int \frac{1}{e^{-4y}-1}dy = ln\frac{1}{\sqrt[4]{|1-e^{4y}|}} + c$

Nota: En el siguiente ejemplo, se ofrece otra alternativa, ya que con la identidad de ángulo mitad ($\cos\frac{\theta}{4} - 1 = -2\cos^2\frac{\theta}{8}$) se reduce a una inmediata.

Ejemplo: $\int \frac{1}{\cos\frac{\theta}{4}-1}d\theta$

Solución: en general, si el integrando contiene funciones trigonométricas (formas binómicas en el denominador), que no sea posible simplificar o transformar con identidades, entonces se multiplica numerador y denominador por el conjugado trigonométrico, es similar al artificio empleado para racionalización.

$$\int \frac{1}{\cos\frac{\theta}{4}-1}\left(\frac{\cos\frac{\theta}{4}+1}{\cos\frac{\theta}{4}+1}\right)d\theta = \int \frac{\cos\frac{\theta}{4}+1}{\cos^2\frac{\theta}{4}-1}d\theta$$

Una vez efectuado el producto se procede a utilizar identidades trigonométricas para simplificar o transformar a integrables de manera inmediata con la aplicación directa del formulario básico.

$$\int \frac{\cos\frac{\theta}{4}+1}{-\left(1-\cos^2\frac{\theta}{4}\right)}d\theta = \int \frac{\cos\frac{\theta}{4}+1}{-sen^2\frac{\theta}{4}}d\theta = \int \left(-\frac{\cos\frac{\theta}{4}}{sen^2\frac{\theta}{4}} - \frac{1}{sen^2\frac{\theta}{4}}\right)d\theta$$

$$= \int \left(-\frac{\cos\frac{\theta}{4}}{sen\frac{\theta}{4}}\frac{1}{sen\frac{\theta}{4}} - \csc^2\frac{\theta}{4}\right)d\theta$$

$$= \int \left(-\cot\frac{\theta}{4}\csc\frac{\theta}{4} - \csc^2\frac{\theta}{4}\right)d\theta$$

Se aplica la formula: $\left(\int (u \pm v)dx = \int u\,dx \pm \int v\,dx\right)$ para expresar la integral como la suma de dos integrales, el argumento de ambas funciones es:

$$u = \frac{\theta}{4}$$

$$du = \frac{1}{4}d\theta$$
$$4du = d\theta$$

Al sustituir en la integral las expresiones obtenidas, también se aplica la fórmula$\left(\int k\,u\,du = k\int u\,du\right)$ en ambos términos y al final las fórmulas específicas: $\left(\int csc\,u\,cot\,u\,du = -csc\,u + C\right)$ y $\left(\int csc^2 u\,du = -cot\,u + C\right)$, respectivamente, de acuerdo con los siguientes pasos:

$$= -\int cot\frac{\theta}{4}csc\frac{\theta}{4}d\theta - \int csc^2\frac{\theta}{4}d\theta$$
$$= -\int cot\,u\,csc\,u\frac{du}{4} - \int csc^2 u\frac{du}{4}$$
$$= -\frac{1}{4}\int cot\,u\,csc\,u\,du - \frac{1}{4}\int csc^2 u\,du$$
$$= -\frac{1}{4}(-csc\,u) - \frac{1}{4}(-cot\,u) + c$$

Al sustituir $u = \frac{\theta}{4}$ y simplificar:

$$= \frac{1}{4}csc\frac{\theta}{4} + \frac{1}{4}cot\frac{\theta}{4} + c$$

Por lo tanto $\int \frac{1}{cos\frac{\theta}{4} - 1}d\theta = \frac{1}{4}csc\frac{\theta}{4} + \frac{1}{4}cot\frac{\theta}{4} + c$

Ejercicios:

1. $\int \frac{x}{(x+1)^2}dx$ R: $ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + c$.
2. $\int \frac{x}{(4+x)^{\frac{2}{3}}}dx$ R: $3\sqrt[3]{x+4}\left(\frac{1}{4}x - 3\right) + c$.
3. $\int \frac{1}{\sqrt{x+3} - \sqrt{x}}dx$ R: $\frac{2}{9}(x+3)\sqrt{x+3} + \frac{2}{9}x\sqrt{x} + c$.
4. $\int \frac{r}{\sqrt{2-r^2} + \sqrt{7-r^2}}dr$ R: $\frac{1}{15}(2-r^2)\sqrt{2-r^2} - \frac{1}{15}(7-r^2)\sqrt{7-r^2} + c$.
5. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^4-1}}dx$ R: $\frac{1}{2}arc\,sec\,x^2 + c$.
6. $\int \frac{cos\,3\theta}{\sqrt{e^{2\,sen\,3\theta} - 1}}d\theta$ R: $\frac{1}{3}arc\,sec\,e^{sen\,3\theta} + c$.
7. $\int \frac{1}{\sqrt{e^{2x} - 1}}dx$ R: $arc\,sec\,e^x + c$; $-arc\,sen\,e^{-x} + c$.
8. $\int \frac{1}{e^{4y} + 1}dy$ R: $ln\frac{1}{\sqrt[4]{1+e^{-4y}}} + c$.

9. $\int \frac{e^{3x}+4}{e^{3x}-4}dx$ R: $\ln\sqrt[3]{\left|\left(1-4e^{-3x}\right)\left(e^{3x}-4\right)\right|}+c$; $x+\ln\sqrt[3]{\left(1-4e^{-3x}\right)^2}+c$.

10. $\int \frac{1}{e^{-2x}+e^{2x}}dx$ R: $\frac{1}{2}\arctan e^{2x}+c$; $-\frac{1}{2}\arctan e^{-2x}+c$.

11. $\int \frac{1}{\left(e^{x}+e^{-x}\right)^2}dx$ R: $-\frac{1}{2\left(e^{2x}+1\right)}+c$; $\frac{1}{2\left(1+e^{-2x}\right)}+c$.

12. $\int \frac{\left(1-e^{x}\right)^2}{e^{2x}+4}dx$ R: $\ln\frac{\sqrt{e^{2x}+4}}{\sqrt[8]{1+4e^{-2x}}}-\arctan\frac{1}{2}e^{x}+c$; $x-\arctan\frac{1}{2}e^{x}+\ln\sqrt[8]{\left|1+4e^{-2x}\right|^3}+c$.

13. $\int \frac{1}{1+\operatorname{sen}4k}dk$ R: $\frac{1}{4}\tan 4k-\frac{1}{4}\sec 4k+c$.

14. $\int \frac{1}{\operatorname{sen}\frac{\rho}{4}-1}d\rho$ R: $-4\tan\frac{1}{4}\rho-4\sec\frac{1}{4}\rho+c$.

15. $\int \frac{1}{1+\csc x}dx$ R: $x-\tan x+\sec x+c$.

16. $\int \frac{1}{1-\sec h}dh$ R: $h+\cot h+\csc h+c$.

17. $\int \frac{\operatorname{sen} w}{1+\operatorname{sen} w}dw$ R: $\sec w-\tan w+w+c$.

18. $\int \frac{1}{1+\cos\frac{\Omega}{2}}d\Omega$ R: $-2\cot\frac{1}{2}\Omega+2\csc\frac{1}{2}\Omega+c$.

19. $\int \frac{1}{1-\cos 3x}dx$ R: $-\frac{1}{3}\cot 3x-\frac{1}{3}\csc 3x+c$.

20. $\int \frac{1}{\cos 2y-\cos^2 y}dy$ R: $\cot 2y+\csc 2y+c$.

21. $\int \frac{1+\operatorname{sen}^2 x}{1-\cos 2x}dx$ R: $\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\cot 2x-\frac{1}{2}\csc 2x+c$.

22. $\int \frac{1}{(1+\cos x)\cot x}dx$ R: $\ln\left|\frac{\csc 2x-\cot 2x}{\csc x-\cot x}\right|+c$.

23. $\int \frac{\cos 6x}{(\cos 3x+\operatorname{sen} 3x)^2}dx$ R: $\ln\sqrt[6]{\left|1+\operatorname{sen} 6x\right|}+c$.

24. $\int \frac{\operatorname{sen}^3\theta}{\cos\theta-1}d\theta$ R: $\cos\theta-\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\theta+c$; $\frac{1}{2}\cos^2\theta+\cos\theta+c$.

25. $\int \sqrt{1+\operatorname{sen} t}\,dt$ R: $-2\sqrt{1-\operatorname{sen} t}+c$.

En los ejemplos anteriores, las estrategias ya aprendidas complementadas con las nuevas nos ayudan a resolver otras integrales de mayor dificultad. El siguiente ejemplo no es la excepción, se aplica el artificio de integración aunada con la de completar el trinomio cuadrado perfecto.

B) Completando el trinomio cuadrado perfecto del denominador obtén las siguientes integrales:

Ejemplo: $\int \frac{5-4x}{9x^2-30x+27}dx$

Solución: El primer paso será tomar al denominador como la función $u = 9x^2 - 30x + 27$ y obtener su diferencial:

$$du = (18x-30)dx$$

Extrayendo a 18 como factor indicado y simplificando se obtiene:

$$du = 18\left(x - \frac{30}{18}\right)dx$$

$$\frac{du}{18} = \left(x - \frac{5}{3}\right)dx$$

De igual manera extrayendo el factor indicado en el numerador del integrando, resulta:

$$\int \frac{-4\left(x-\frac{5}{4}\right)}{9x^2-30x+27}dx$$

Al aplicar la fórmula $\left(\int k\,u\,du = k\int u\,du\right)$, restar y sumar $\frac{5}{3}$ en el numerador del integrando y simplificar, se transforma en:

$$-4\int \frac{\left(x-\frac{5}{3}+\frac{5}{3}-\frac{5}{4}\right)}{9x^2-30x+27}dx = -4\int \frac{\left(x-\frac{5}{3}+\frac{5}{12}\right)}{9x^2-30x+27}dx$$

Al Separar como una suma de integrales, se obtiene:

$$= -4\int \frac{x-\frac{5}{3}}{9x^2-30x+27}dx - \frac{20}{12}\int \frac{1}{9x^2-30x+27}dx$$

Para la primera integral se sustituyen los valores previamente encontrados y para la segunda se opta por completar el trinomio cuadrado perfecto del denominador.

$$= -4\int \frac{\frac{du}{18}}{u} - \frac{5}{3}\int \frac{1}{9x^2-30x+27}dx$$

Completando el trinomio cuadrado perfecto:

$$9x^2-30x+27 = 9x^2-30x+25-25+27 = (3x-5)^2+27$$

Al sustituir en la segunda integral:

$$-\frac{4}{18}\int\frac{du}{u}-\frac{5}{3}\int\frac{1}{(3x-5)^2+2}dx$$

Para el primer término se aplica la fórmula $\left(\int\frac{du}{u}=ln|u|+C\right)$, en la segunda observa suma de cuadrados, por lo cual se aplica la fórmula $\left(\int\frac{dv}{v^2+a^2}=\frac{1}{a}arc\tan\frac{v}{a}+\right)$, haciendo el respectivo análisis $v=3x-5$ y $a=\sqrt{2}$.

$$=-\frac{2}{9}\int\frac{du}{u}-\frac{5}{3}\int\frac{1}{(3x-5)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}dx$$

$$v=3x-5$$
$$dv=3dx$$
$$\frac{dv}{3}=dx$$

Al sustituir los datos correspondientes en el segundo miembro, integrar, simplificar el resultado y sustituir las funciones que corresponden a u y v retomando la variable inicial, se obtiene el siguiente desarrollo:

$$-\frac{2}{9}\int\frac{du}{u}-\frac{5}{3}\int\frac{\frac{dv}{3}}{v^2+a^2}=-\frac{2}{9}\int\frac{du}{u}-\frac{5}{9}\int\frac{dv}{v^2+a^2}=-\frac{2}{9}ln|u|-\frac{5}{9}\left(\frac{1}{a}arc\tan\frac{v}{a}\right)+c$$

$$=ln\left|9x^2-30x+27\right|^{-\frac{2}{9}}-\frac{5}{9}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}arc\tan\frac{3x-5}{\sqrt{2}}\right)+c$$

$$=ln\frac{1}{\left|9x^2-30x+27\right|^{\frac{2}{9}}}-\frac{5}{9}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}arc\tan\frac{\sqrt{2}}{2}(3x-5)\right)+c$$

$$=ln\frac{1}{\sqrt[9]{\left(9x^2-30x+27\right)^2}}-\frac{5\sqrt{2}}{18}arc\tan\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(3x-5)\right]+c$$

Por lo tanto $\int\frac{5-4x}{9x^2-30x+27}dx=ln\frac{1}{\sqrt[9]{\left(9x^2-30x+27\right)^2}}-\frac{5\sqrt{2}}{18}arc\tan\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(3x-5)\right]+c$

Ejemplo: $\int\frac{7t}{\sqrt{-t^2-6t-1}}dt$

Solución: Antes de completar el trinomio cuadrado perfecto, se extrae como factor indicado -1, después se completa el trinomio cuadrado perfecto para posteriormente multiplicar por -1 como a continuación se muestra:

$$-t^2-6t-1=-\left[t^2+6t+1\right]=-\left[t^2+6t+9-9+1\right]$$
$$=-\left[(t+3)^2-8\right]$$
$$=8-(t+3)^2$$

Al sustituir en la función integrando, observa que tiene una diferencia de cuadrados como en la fórmula $\left(\int \frac{1}{\sqrt{a^2-u^2}}du = arc\,sen\frac{u}{a}+C\right)$, donde: $u=t+3$ y $a=2\sqrt{2}$.

$$\int \frac{7t}{\sqrt{8-(t+3)^2}}dt = \int \frac{7t}{\sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2-(t+3)^2}}dt$$

El proceso de sustitución y el cambio de variable parecen similares, salvo que en el cambio de variable primero se despeja una variable en términos de la otra, para posteriormente calcular su diferencial y hacer las sustituciones correspondientes.

$$u = t+3$$
$$u-3 = t$$
$$du = dt$$

Por lo tanto al sustituir el valor de t, dt y el de $2\sqrt{2}$, la integral se expresará en términos de u y a.

$$\int \frac{7(u-3)}{\sqrt{a^2-u^2}}du = \int \frac{7u-21}{\sqrt{a^2-u^2}}du$$

Primero se dividir término a término para separar en dos expresiones racionales y se aplican las fórmulas $\left(\int (u \pm v)\,dx = \int u\,dx \pm \int v\,dx\right)$ y $\left(\int k\,u\,du = k\int u\,du\right)$:

$$= \int \frac{7u}{\sqrt{a^2-u^2}}du - \int \frac{21}{\sqrt{a^2-u^2}}du$$
$$= 7\int \frac{u}{\sqrt{a^2-u^2}}du - 21\int \frac{1}{\sqrt{a^2-u^2}}du$$

En la primera integral la función v es la diferencia de cuadrados, a partir de esta se obtiene el diferencial:

$$v = a^2-u^2$$
$$dv = -2u\,du$$
$$-\frac{dv}{2} = u\,du$$

Al sustituir en la primera integral del paso anterior, se obtiene:

$$7\int \frac{u}{\sqrt{a^2-u^2}}du - 21\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = 7\int \frac{-\frac{dv}{2}}{\sqrt{v}} - 21\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}$$

Transformando el radical a potencia con exponente fraccionario y ubicada en el numerador, se aplica la formula $\left(\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1}+C\right)$, mientras que en el segundo caso se aplicará la fórmula $\left(\int \frac{1}{\sqrt{a^2-u^2}}du = arc\,sen\frac{u}{a}+C\right)$, como se muestra a continuación:

$$= -\frac{7}{2}\int v^{-\frac{1}{2}}dv - 21\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}$$

$$=-\frac{7}{2}\left(\frac{v^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right)-21arc\,sen\frac{u}{a}+c$$

$$=-\frac{7}{2}\left(2v^{\frac{1}{2}}\right)-21arc\,sen\frac{u}{a}+c$$

Al sustituir los valores de u, v y a respectivamente en términos de la variable t, se obtiene:

$$=-7\sqrt{a^2-u^2}-21arc\,sen\frac{t+3}{2\sqrt{2}}+c=-7\sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2-(t+3)^2}-21arc\,sen\left[\frac{\sqrt{2}}{4}(t+3)\right]+c$$

Por lo tanto: $$\int\frac{7t}{\sqrt{-t^2-6t-1}}dt=-7\sqrt{-t^2-6t-1}-21arc\,sen\left[\frac{\sqrt{2}}{4}(t+3)\right]+c$$

En el ejemplo siguiente, no se explica paso a paso lo que se realiza, pero se hace al mismo tiempo siguiendo dos procesos equivalentes, desarrollado cada uno por columna, para efectos de hacer un análisis comparativo.

$$\int\frac{r^2+6r+11}{(r+3)\sqrt{r^2+6r+5}}dr$$

$$r^2+6r+11$$
$$r^2+6r+9-9+11$$
$$(r+3)^2+2$$

$$=\int\frac{(r+3)^2+2}{(r+3)\sqrt{r^2+6r+5}}dr$$

$$=\int\left(\frac{(r+3)^2}{(r+3)\sqrt{r^2+6r+5}}+\frac{2}{(r+3)\sqrt{r^2+6r+5}}\right)dr$$

$$=\int\frac{r+3}{\sqrt{r^2+6r+5}}dr+\int\frac{2}{(r+3)\sqrt{r^2+6r+5}}dr$$

$$u=r^2+6r+5$$
$$du=(2r+6)dr$$
$$du=2(r+3)dr$$
$$\frac{du}{2}=(r+3)dr$$

$$r^2+6r+5$$
$$r^2+6r+9-9+5$$
$$(r+3)^2-4$$
$$(r+3)^2-2^2$$

$$=\int\frac{\frac{du}{2}}{\sqrt{u}}+2\int\frac{1}{(r+3)\sqrt{(r+3)^2-2^2}}dr$$

$$v=r+3 \qquad a=2$$
$$dv=dr$$

$$\int\frac{r^2+6r+11}{(r+3)\sqrt{r^2+6r+5}}dr$$

$$r^2+6r+5$$
$$r^2+6r+9-9+5$$
$$(r+3)^2-4$$
$$(r+3)^2-2^2$$

$$=\int\frac{r^2+6r+11}{(r+3)\sqrt{(r+3)^2-2^2}}dr$$

$$u=r+3 \qquad a=2$$
$$u-3=r$$
$$du=dr$$

$$=\int\frac{(u-3)^2+6(u-3)+11}{u\sqrt{u^2-a^2}}du$$

$$=\int\frac{u^2-6u+9+6u-18+11}{u\sqrt{u^2-a^2}}du$$

$$=\int\frac{u^2+2}{u\sqrt{u^2-a^2}}du$$

$$=\int\frac{u}{\sqrt{u^2-a^2}}du+2\int\frac{1}{u\sqrt{u^2-a^2}}du$$

$$v=u^2-a^2$$
$$dv=2u\,du$$
$$\frac{dv}{2}=u\,du$$

$$= \frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{2}}du + 2\int \frac{1}{v\sqrt{v^2 - a^2}}dv$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right) + 2\left(\frac{1}{a}arc\,sec\frac{v}{a}\right) + c$$

$$= \frac{1}{2}\left(2\sqrt{r^2 + 6r + 5}\right) + 2\left(\frac{1}{2}arc\,sec\frac{r+3}{2}\right) + c$$

$$= \int \frac{\frac{dv}{2}}{\sqrt{v}} + 2\int \frac{1}{u\sqrt{u^2 - a^2}}du$$

$$= \frac{1}{2}\int v^{-\frac{1}{2}}dv + 2\int \frac{1}{u\sqrt{u^2 - a^2}}du$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{v^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right) + 2\left(\frac{1}{a}arc\,sec\frac{u}{a}\right) + c$$

$$= \frac{1}{2}\left(2\sqrt{u^2 - a^2}\right) + 2\left(\frac{1}{2}arc\,sec\frac{r+3}{2}\right) + c$$

$$\sqrt{(r+3)^2 - 2^2} + arc\,sec\frac{r+3}{2} + c$$

Por lo tanto, para ambos procedimientos:

$$\int \frac{r^2 + 6r + 11}{(r+3)\sqrt{r^2 + 6r + 5}}dr = \sqrt{r^2 + 6r + 5} + arc\,sec\frac{r+3}{2} + c$$

<u>Nota</u>: *Los procesos descritos varía dependiendo la integral que se esté realizando, lo importante es practicar y dominar uno de los dos métodos desarrollados.*

Ejercicios:

1. $\int \frac{1}{x^2 + 6x + 10}dx$ R: $arc\tan(x+3) + c$.
2. $\int \frac{1}{3x^2 + 6x + 5}dx$ R: $\frac{\sqrt{6}}{6}arc\tan\frac{\sqrt{6}(x+1)}{2} + c$.
3. $\int \frac{e^x}{e^{2x} + 2e^x + 3}dx$ R: $\frac{\sqrt{2}}{2}arc\tan\frac{\sqrt{2}(e^x + 1)}{2} + c$.
4. $\int \frac{1}{e^x + e^{-x} + 1}dx$ R: $\frac{2\sqrt{3}}{3}arc\tan\frac{\sqrt{3}(2e^x + 1)}{3} + c$ / $\frac{2\sqrt{3}}{3}arc\tan\frac{\sqrt{3}(2e^{-x} + 1)}{3} + c$.
5. $\int \frac{x}{5x^2 - 2x + 1}dx$ R: $ln\sqrt[10]{\left|x^2 - \frac{2}{5}x + \frac{1}{5}\right|} + \frac{1}{10}arc\tan\frac{5x-1}{2} + c$.
6. $\int \frac{5y}{9y^2 - 6y + 10}dy$ R: $ln\sqrt[18]{\left|9y^2 - 6y + 10\right|^5} + \frac{5}{27}arc\tan\frac{3y-1}{3} + c$.
7. $\int \frac{x^2}{x^2 - 4x + 13}dx$ R: $x + ln\left(x^2 - 4x + 13\right)^2 - \frac{5}{3}arc\tan\frac{x-2}{3} + c$.
8. $\int \frac{x+1}{x^2 - 4x + 8}dx$ R: $ln\sqrt{\left|x^2 - 4x + 8\right|} + \frac{3}{2}arc\tan\frac{x-2}{2} + c$.

9. $\int \frac{3h-5}{4h-3h^2-3}dh$ R: $\frac{3\sqrt{5}}{5}arc\tan\frac{\sqrt{5}(3h-2)}{5}-\ln\sqrt{\left|h^2-\frac{4}{3}h+1\right|}+c$.

10. $\int \frac{1}{\sqrt{4y-y^2}}dy$ R: $arc\,sen\frac{y-2}{2}+c$.

11. $\int \frac{1}{\sqrt{27+6r-r^2}}dr$ R: $arc\,sen\frac{r-3}{6}+c$.

12. $\int x\left(8+4x-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}dx$ R: $2arc\,sen\frac{\sqrt{3}(x-2)}{6}-\sqrt{8+4x-x^2}+c$.

13. $\int \frac{4+8x}{\sqrt{18x-x^2-76}}dx$ R: $76arc\,sen\frac{\sqrt{5}(x-9)}{5}-8\sqrt{18x-x^2-76}+c$.

14. $\int \frac{2-5x}{\sqrt{12x-4x^2-8}}dx$ R: $\frac{5}{4}\sqrt{12x-4x^2-8}-\frac{11}{4}arc\,sen(2x-3)+c$.

15. $\int \frac{4x-2}{\sqrt{2+6x-3x^2}}dx$ R: $\frac{2\sqrt{3}}{3}arc\,sen\frac{\sqrt{15}(x-1)}{5}-\frac{4}{3}\sqrt{2+6x-3x^2}+c$.

16. $\int \frac{-5-4x}{\sqrt{-x^2-4x+12}}dx$ R: $4\sqrt{-x^2-4x+12}+3arc\,sen\frac{x+2}{4}+c$.

17. $\int \frac{1}{(2t+1)\sqrt{4t^2+4t-1}}dt$ R: $\frac{\sqrt{2}}{4}arc\sec\frac{\sqrt{2}(2t+1)}{2}+c$.

18. $\int \frac{1}{(y+2)\sqrt{y^2+4y+3}}dy$ R: $arc\sec(y+2)+c$.

19. $\int \frac{x^2+6x+11}{(x+3)\sqrt{x^2+6x+5}}dx$ R: $\sqrt{x^2+6x+5}+arc\sec\frac{x+3}{2}+c$.

20. $\int \frac{40x^2-120x+100}{(2x-3)\sqrt{4x^2-12x-16}}dx$ R: $5\sqrt{4x^2-12x-16}+arc\sec\frac{2x-3}{5}+c$.

21. $\int \frac{\sqrt{y^2-4y+3}}{(y-2)}dy$ R: $\sqrt{y^2-4y+3}-arc\sec(y-2)+c$.

C) Cambie de variable para eliminar radicales del integrando y calcule:

El cambio de variable, en especial, se recomienda para la integración de funciones que incluyen radicales, no obstante que ya se aplicó en otros ejercicios. Se toma el radical de la integral igual a una variable distinta para hacer el despeje (la variable original en términos de la nueva variable), si la integral presenta dos radicales de diferentes índices e iguales radicandos o subradicales, entonces se propone la raíz cuyo índice sea el mínimo común múltiplo de los índices de las raíces involucradas, para igualarla a otra variable lineal así como los cambios que a partir de este se requieran para expresar la integral en función de la variable propuesta.

Ejemplo: $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt[3]{3x+2}}$

Solución: Para empezar se iguala el radical a una variable diferente de la que está en la integral, despejamos la variable "x" y después obtenemos la diferencial dx, como se muestra a continuación:

$$w=\sqrt[3]{3x+2}$$
$$w^3=3x+2$$
$$w^3-2=3x$$

$$x=\frac{w^3-2}{3}=\frac{1}{3}w^3-\frac{2}{3}$$

Entonces:

$$dx=w^2dw$$

Al sustituir los elementos en la integral y simplificar, se obtiene:

$$\int\frac{\left(\frac{1}{3}w^3-\frac{2}{3}\right)^2w^2dw}{w}=\int\left(\frac{1}{9}w^6-\frac{4}{9}w^3+\frac{4}{9}\right)w\,dw=\int\left(\frac{1}{9}w^7-\frac{4}{9}w^4+\frac{4}{9}w\right)dw$$

Integrando con las fórmulas $\left(\int(u\pm v)dx=\int u\,dx\pm\int v\,dx\right)$ y $\left(\int k\,u\,du=k\int u\,du\right)$ para expresarla como una de integrales, después se aplica la fórmula $\left(\int u^n du=\frac{u^{n+1}}{n+1}+C\right)$ y se simplifica, como se detalla en los siguientes pasos:

$$=\frac{1}{9}\int w^7\,dw-\frac{4}{9}\int w^4\,dw+\frac{4}{9}\int w\,dw$$
$$=\frac{1}{9}\left(\frac{w^8}{8}\right)-\frac{4}{9}\left(\frac{w^5}{5}\right)+\frac{4}{9}\left(\frac{w^2}{2}\right)+c$$
$$=\frac{1}{72}w^8-\frac{4}{45}w^5+\frac{2}{9}w^2+c$$
$$=\frac{1}{9}w^2\left(\frac{1}{8}w^6-\frac{4}{5}w^3+2\right)+c$$
$$=\frac{1}{9}w^2\left(\frac{1}{8}(w^3)^2-\frac{4}{5}w^3+2\right)+c$$

Al sustituir w en función de la variable $"x"$ y simplificar, se obtiene en cada paso:

$$=\frac{1}{9}\left(\sqrt[3]{3x+2}\right)^2\left(\frac{1}{8}(3x+2)^2-\frac{4}{5}(3x+2)+2\right)+c$$
$$=\frac{1}{9}\sqrt[3]{(3x+2)^2}\left(\frac{1}{8}(9x^2+12x+4)-\frac{12}{5}x-\frac{8}{5}+2\right)+c$$
$$=\frac{1}{9}\sqrt[3]{(3x+2)^2}\left(\frac{9}{8}x^2+\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}-\frac{12}{5}x+\frac{2}{5}\right)+c$$
$$=\frac{1}{9}\sqrt[3]{(3x+2)^2}\left(\frac{9}{8}x^2-\frac{9}{10}x+\frac{9}{10}\right)+c$$
$$=\sqrt[3]{(3x+2)^2}\left(\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{10}x+\frac{1}{10}\right)+c$$

Por lo tanto $\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt[3]{3x+2}}=\left(\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{10}x+\frac{1}{10}\right)\sqrt[3]{(3x+2)^2}+c$

Ejemplo: $\int\frac{1}{2\sqrt[3]{y}+\sqrt{y}}dy$

Solución: Se observan dos radicales con diferentes índices e igual expresión en el subrradical, por lo tanto el mínimo común múltiplo de los índices es $3 \times 2 = 6$, para hacer el cambio de variable y a partir de este los consecuentes cambios:

$$w = \sqrt[6]{y}$$
$$w^6 = y$$
$$6w^5 dw = dy$$

$$w^6 = y$$
$$\sqrt[3]{w^6} = \sqrt[3]{y}$$
$$w^{\frac{6}{3}} = \sqrt[3]{y}$$
$$w^2 = \sqrt[3]{y}$$

$$w^6 = y$$
$$\sqrt{w^6} = \sqrt{y}$$
$$w^{\frac{6}{2}} = \sqrt{y}$$
$$w^3 = \sqrt{y}$$

Al sustituir en la integral y simplificar, la misma integral se expresa como:

$$\int \frac{1}{2w^2 + w^3} 6w^5 dw = \int \frac{6w^5 dw}{w^2(2+w)} = \int \frac{6w^3}{2+w} dw$$

Ahora, como el grado del polinomio numerador (dividendo) es mayor que el grado del polinomio denominador (divisor), entonces procede la división de polinomios para reducirla a integrales inmediatas.

$$\begin{array}{r|l} & 6w^2 - 12w + 24 \\ w+2 & 6w^3 \\ & \underline{-6w^3 - 12w^2} \\ & -12w^2 \\ & \underline{12w^2 + 24w} \\ & 24w \\ & \underline{-24w - 48} \\ & -48 \end{array}$$

$$\int \left(6w^2 - 12w + 24 - \frac{48}{w+2}\right) dw$$

A continuación se detalla desde la aplicación de las fórmulas: 1, 2, 3, 4 y 5 (formulario incluido en el material), respectivamente para integrar, la simplificación del resultado hasta la sustitución de w , en términos de la variable "y" :

$$= 6\int w^2 dw - 12\int w\, dw + 24\int dw - 48\int \frac{1}{w+2} dw$$
$$= 6\left(\frac{w^3}{3}\right) - 12\left(\frac{w^2}{2}\right) + 24w - 48\, ln|w+2| + c$$
$$= 2\sqrt{y} - 16\sqrt[3]{y} + 24\sqrt[6]{y} - ln\left(\sqrt[6]{y} + 2\right)^{48} + c$$

Por lo tanto: $\int \frac{1}{2\sqrt[3]{y} + \sqrt{y}} dy = 2\sqrt{y} - 16\sqrt[3]{y} + 24\sqrt[6]{y} - ln\left(\sqrt[6]{y} + 2\right)^{48} + c$

Ejercicios:

1. $\int 2x\sqrt{2x-1}\,dx$ R: $\frac{2}{5}(2x-1)\left(x+\frac{1}{3}\right)\sqrt{2x-1}+c$.

2. $\int x\sqrt[3]{(x+1)^2}\,dx$ R: $\frac{3}{8}(x+1)\left(x-\frac{3}{5}\right)\sqrt[3]{(x+1)^2}+c$.

3. $\int x\sqrt{3-x}\,dx$ R: $-\frac{2}{5}(3-x)(x+2)\sqrt{3-x}+c$.

4. $\int x^2(3-x)^{-\frac{1}{2}}\,dx$ R: $-\frac{2}{5}(x^2+4x-24)\sqrt{3-x}+c$.

5. $\int\sqrt{1+\sqrt{x}}\,dx$ R: $4\left(\frac{1}{5}\sqrt{x}-\frac{2}{15}\right)(1+\sqrt{x})\sqrt{1+\sqrt{x}}+c$.

6. $\int_0^3\frac{x^2+2x}{\sqrt{1+x}}\,dx$ R: $\frac{52}{5}$.

7. $\int\frac{1}{\sqrt[3]{r}-r}\,dr$ R: $\ln\frac{1}{\left|\left(1-\sqrt[3]{r^2}\right)\sqrt{1-\sqrt[3]{r^2}}\right|}+c$.

8. $\int\frac{1}{(x+3)^{\frac{3}{2}}+(x+3)^{\frac{1}{2}}}\,dx$ R: $2\arctan\sqrt{x+3}+c$.

9. $\int\frac{e^{2x}}{\sqrt{1+e^x}}\,dx$ R: $\frac{2}{3}(e^x-2)\sqrt{1+e^x}+c$.

10. $\int\frac{\sqrt{x}}{1+x}\,dx$ R: $2\sqrt{x}-2\arctan\sqrt{x}+c$.

11. $\int\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}}\,dx$ R: $2\sqrt{x}+4\sqrt[4]{x}+\ln\left(\sqrt[4]{x}-1\right)^4+c$
$2\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^2+\ln\left(\sqrt[4]{x}-1\right)^4+c$.

12. $\int\frac{\sqrt[6]{t}}{1+\sqrt[3]{t}}\,dt$ R: $\frac{6}{5}\sqrt[6]{t^5}-2\sqrt{t}+6\sqrt[6]{t}-6\arctan\sqrt[6]{t}+c$.

13. $\int\frac{t+5}{(t+4)\sqrt{t+2}}\,dt$ R: $2\sqrt{t+2}+\sqrt{2}\arctan\frac{\sqrt{2t+4}}{2}+c$.

14. $\int\frac{1}{x+2\sqrt{x}+5}\,dx$ R: $\ln\left|x+2\sqrt{x}+5\right|-\arctan\frac{\sqrt{x}+1}{2}+c$.

15. $\int\frac{1}{\sqrt{e^{2x}-1}}\,dx$ R: $\arctan\sqrt{e^{2x}-1}+c$.

16. $\int\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}}\,dx$ R: $3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}+\ln\left(\sqrt[6]{x}-1\right)^6+c$
$3\left(\sqrt[6]{x}+1\right)^2+\ln\left(\sqrt[6]{x}-1\right)^6+c$.

17. $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{2y}\left(9+\sqrt[3]{2y}\right)}\,dy$ R: $3-9\arctan\frac{1}{3}$.

18. $\int\frac{1}{e^x+e^{-x}+1}\,dx$ R: $\frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{\sqrt{3}\left(2e^x+1\right)}{3}+c$.

MÉTODOS DE INTEGRACIÓN

Los métodos de integración son estrategias utilizadas para transformar la integral mediante formulas o pasos establecidos donde se combinarán artificios, procedimientos algebraicos y trigonométricos para transformar la integral a una inmediata.

Los métodos que se tratarán son: la integración por partes, integración de potencias trigonométricas, por sustitución trigonométrica y la integración por fracciones parciales; existen otros, no contemplados en el programa para este curso.

INTEGRACIÓN POR PARTES.
La integración por partes es un método, se emplea cuando se tiene un producto de dos funciones, consideradas como una función por la diferencial de otra; la fórmula de integración por partes se obtiene de la fórmula de derivada de un producto de dos funciones.

$$\frac{d}{dx}[uv] = u\frac{d}{dx}[v] + v\frac{d}{dx}[u]$$

Multiplicando por la diferencial de la variable en ambos miembros:

$$dx\left(\frac{d}{dx}[uv]\right) = \left(u\frac{d}{dx}[v] + v\frac{d}{dx}[u]\right)dx$$

Luego:

$$d[uv] = u\,dv + v\,du$$

Integrando ambos miembros:

$$\int d[uv] = \int (u\,dv + v\,du)$$
$$uv = \int u\,dv + \int v\,du$$

Despejando:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Representando por A(x) a una función algebraica y por T(x) a una trascendente, la integración por partes se presenta en 4 casos fundamentales que son:

$$\int u\,dv = \begin{cases} 1^{er}\text{caso - } u = T(x);\ dv = A(x) \\ 2^{do}\text{caso - } u = A(x);\ dv = T(x) \\ 3^{er}\text{caso - } u = T(x);\ dv = T(x) \\ 4^{to}\text{caso - } u = A(x);\ dv = A(x) \end{cases}$$

En el primer caso se tiene una función trascendental $(T(x))$ que no tiene integración (inmediata), como es el caso de los logaritmos y las funciones trigonométricas inversas.

Nota: La fórmula de integración por partes se puede emplear en la misma integral las veces que sea necesario.

A) Integrales tipo $\int T(x)\,A(x)\,dx$. *Con* T *una función trascendental,* A *algebraica,* $u = T(x)$ *y* $dv = A(x)\,dx$.

Ejemplo: $\int \sqrt{5x}\,ln\frac{x}{5}\,dx$

Solución: Observamos que en la integral aparece un logaritmo natural, el cual no tiene integración inmediata.

Para emplear integración por partes lo importante es elegir una función para derivar y otra para integrar, por lo tanto analizamos que tipo de funciones son las que aparecen como factores se están multiplicando.

$$T(x) = ln\frac{x}{5} \text{ y } A(x) = \sqrt{5x}$$

Como se tiene una función trascendental que, (por lo pronto,) no se puede integrar, elegimos $u = T(x)$ y obtenemos su diferencial; y $dv = A(x)$ y la integramos.

$$u = ln\frac{x}{5}$$
$$du = \frac{1}{\frac{x}{5}}\left(\frac{1}{5}\right)dx$$
$$du = \frac{1}{x}dx$$

$$dv = \sqrt{5x}\,dx$$
$$\int dv = \int (5x)^{\frac{1}{2}}\,dx$$
$$v = \frac{2}{15}(5x)\sqrt{5x}$$
$$v = \frac{2}{3}x\sqrt{5x} + c$$

Al sustituir en la fórmula de integración por partes, no se considerará la constante de integración en V porque (aún) no se ha terminado de integrar. Aplicando la fórmula de integración por partes y simplificamos:

$$ln\frac{x}{5}\left(\frac{2}{3}x\sqrt{5x}\right) - \int\left(\frac{2}{3}x\sqrt{5x}\right)\left(\frac{1}{x}dx\right)$$
$$\frac{2}{3}x\sqrt{5x}\,ln\frac{x}{5} - \frac{2}{3}\int\sqrt{5x}\,dx$$

La integrar se redujo a una más sencilla, que integraremos ahora identificando a la función y calculando su diferencial.

$$w = 5x$$
$$dw = 5dx$$
$$\frac{dw}{5} = dx$$

Sustituimos en la integral, aplicamos las formulas necesarias y simplificamos.

$$\frac{2}{3}x\sqrt{5x}\,ln\frac{x}{5} - \frac{2}{3}\int\sqrt{w}\,\frac{dw}{5}$$
$$\frac{2}{3}x\sqrt{5x}\,ln\frac{x}{5} - \frac{2}{15}\int w^{\frac{1}{2}}\,dw$$
$$\frac{2}{3}x\sqrt{5x}\,ln\frac{x}{5} - \frac{2}{15}\left(\frac{w^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right) + c$$

$$\frac{2}{3}x\sqrt{5x}\,ln\frac{x}{5}-\frac{2}{15}\left(\frac{2}{3}(5x)(5x)^{\frac{1}{2}}\right)+c$$

$$\frac{2}{3}x\sqrt{5x}\left(ln\frac{x}{5}-\frac{2}{3}\right)+c$$

Por lo tanto: $\int\sqrt{5x}\,ln\frac{x}{5}dx=\frac{2}{3}x\sqrt{5x}\left(ln\frac{x}{5}-\frac{2}{3}\right)+c$

Ejercicios:

1. $\int ln\,x^3\,dx$ R: $x\left(ln\,x^3-3\right)+c$.
2. $\int arc\cos x\,dx$ R: $x\,arc\cos x-\sqrt{1-x^2}+c$.
3. $\int\frac{ln\,x}{\sqrt[3]{x}}dx$ R: $\frac{2}{3}\sqrt[3]{x^2}\left(ln\,x-\frac{2}{3}\right)+c$.
4. $\int x\,arc\sec x\,dx$ R: $\frac{1}{2}x^2arc\sec x-\frac{1}{2}\sqrt{x^2-1}+c$.
5. $\int x^3arc\tan x\,dx$ R: $\frac{1}{4}x^4\,arc\tan x-\frac{1}{12}x^3+\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}arc\tan x+c$.
6. $\int x^3arc\tan x^2dx$ R: $\frac{1}{4}\left[x^4arc\tan x^2-x^2+arc\tan x^2\right]+c$.
7. $\int arc\,sen^2\frac{x}{2}dx$ R: $x\,arc\,sen^2\frac{1}{2}x+2\sqrt{4-x^2}\,arc\,sen\frac{1}{2}x-2x+c$.
8. $\int ln^2 3x\,dx$ R: $x\left(ln^2 3x-ln\,9x^2+2\right)+c$.
9. $\int\left(x^2-2x\right)ln^2x\,dx$ R: $\left(\frac{1}{3}x^3-x^2\right)ln^2x-\left(\frac{1}{9}x^3-\frac{1}{2}x^2\right)ln\,x^2+\frac{2}{27}x^3-\frac{1}{2}x^2+c$.
10. $\int\sqrt[3]{x}\,ln^2x\,dx$ R: $\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}\left(ln^2x-ln\,x\sqrt{x}-\frac{9}{8}\right)+c$.
11. $\int x\,arc\tan^2x\,dx$ R: $\frac{1}{2}x^2arc\tan^2x-x\,arc\tan x+\frac{1}{2}arc\tan^2x+ln\sqrt{|1+x^2|}+c$.
12. $\int 6x^2arc\,sen\,2x\,dx$ R: $2x^3arc\,sen\,2x+\frac{1}{6}\left(1+2x^2\right)\sqrt{1-4x^2}+c$.

B) Integrales tipo $\int A(x)\,T(x)\,dx$. *Con* A *una función* **algebraica**, T *trascendental*, $u=A(x)$ *y* $dv=T(x)dx$.

Ejemplo: $\int 4y\sec^2\frac{y}{3}dy$

Solución: Como en este ejercicio se tiene fórmula para integrar a la secante cuadrada, se hará una exploración obteniendo la diferencial del argumento.

$$w=\frac{y}{3}dy$$

$$dw=\frac{1}{3}dy$$

$$3dw=dy$$

Como se observa, nos sobra una variable en la integral, por la constante no hay problema porque podemos utilizar una fórmula para ubicarla fuera de la integral. Entonces se tiene una integral con el producto de dos

ILATE

funciones, trascendente por algebraica; donde la trascendente sí tiene una fórmula de integración, por lo tanto $u = A(x)$ y $dv = T(x)$.

$$4\int y\, sec^2 \frac{y}{3} dy$$

$$u = y \qquad dv = sec^2 \frac{y}{3} dy$$

$$du = dy \qquad \int dv = \int sec^2 \frac{y}{3} dy$$

$$v = 3\, tan \frac{y}{3} + c$$

Sustituyendo en la fórmula de integración por partes:

$$4\left[y\left(3\, tan \frac{y}{3}\right) - \int\left(3\, tan \frac{y}{3}\right) dy\right]$$

$$12y\, tan \frac{y}{3} - 12\int tan \frac{y}{3} dy$$

$$12y\, tan \frac{y}{3} - 12\int tan\, w (3dw)$$

$$12y\, tan \frac{y}{3} - 36\int tan\, w\, dw$$

$$12y\, tan \frac{y}{3} - 36\int tan\, w\, dw$$

$$12y\, tan \frac{y}{3} - 36\, ln|sec\, w| + c$$

$$12y\, tan \frac{y}{3} - ln\left(sec^{36} \frac{y}{3}\right) + c$$

Por lo tanto: $\int 4y\, sec^2 \frac{y}{3} dy = 12y\, tan \frac{y}{3} - ln\left(sec^{36} \frac{y}{3}\right) + c$

Ejercicios:

1. $\int x^3 sen\, x^2\, dx$ R: $-\frac{1}{2}x^2 \cos x^2 + \frac{1}{2} sen\, x^2 + c$.
2. $\int \frac{3x-1}{sen^2 \frac{x}{2}} dx$ R: $-2(3x-1)cot \frac{1}{2}x + ln\, sen^{12} \frac{1}{2}x + c$.
3. $\int 5x\, tan^2 2x\, dx$ R: $\frac{5}{2}x\, tan\, 2x - \frac{5}{2}x^2 - ln\left(|sec\, 2x| \sqrt[4]{|sec\, 2x|}\right) + c$.
4. $\int x^3 e^{x^2} dx$ R: $\frac{1}{2}e^{x^2}\left(x^2 - 1\right) + c$.
5. $\int \frac{\theta}{1 + sen\,\theta} d\theta$ R: $\theta(tan\,\theta - sec\,\theta) + ln|1 + sen\theta| + c$.
6. $\int \frac{x}{1 - \cos x} dx$ R: $-x(cot\, x + csc\, x) + ln|1 - \cos x| + c$.
7. $\int sen \sqrt{2x}\, dx$ R: $-\sqrt{2x} \cos \sqrt{2x} + sen \sqrt{2x} + c$.

8. $\int e^{\sqrt{3y+9}}dy$ R: $\frac{2}{3}e^{\sqrt{3y+9}}\left(\sqrt{3y+9}-1\right)+c$.

9. $\int\left(x^2-2x+1\right)\cos x\,dx$ R: $(x-1)^2\operatorname{sen}x+2(x-1)\cos x-2\operatorname{sen}x+c$.

10. $\int x^2\operatorname{sen}x\cos x\,dx$ R: $-\frac{1}{4}x^2\cos 2x+\frac{1}{4}x\operatorname{sen}2x+\frac{1}{8}\cos 2x+c$. $\frac{1}{2}x^2\operatorname{sen}^2x-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}x\operatorname{sen}2x+\frac{1}{8}\cos 2x+c$

11. $\int\frac{x^2+3x+1}{e^{2x}}dx$ R: $-\frac{x^2+4x+3}{2e^{2x}}+c$.

12. $\int\sqrt{t}\,e^{\sqrt{t}}dt$ R: $2e^{\sqrt{t}}\left(t-2\sqrt{t}+2\right)+c$.

13. $\int\frac{\cos^2(\ln w)}{w}dw$ R: $\ln w\cos^2(\ln w)-\ln\sqrt{w}\cos\left(\ln w^2\right)+\frac{1}{4}\operatorname{sen}\left(\ln w^2\right)+c$.

C) Integrales tipo $\int T_1(x)\,T_2(x)\,dx$, donde ambas funciones son trascendentales.

Ejemplo: $\int 7^{2r}\operatorname{sen}2r\,dr$

Solución: En este ejercicio se observa que se tienen dos funciones trascendentales que se están multiplicando por lo tanto se aplicara el método de integración por partes eligiendo a la función u_1 como alguna de las dos funciones trascendentales.

$$u_1=7^{2r} \qquad du_1=2\left(7^{2r}\right)\ln 7\,dr$$

$$dv_1=\operatorname{sen}2r\,dr \qquad \int dv_1=\int\operatorname{sen}2r\,dr \qquad v_1=-\frac{1}{2}\cos 2r+c$$

Sustituimos en la fórmula de integración por partes (no se considerara la constante de integración porque no se ha terminado de integrar) y simplificamos.

$$7^{2r}\left(-\frac{1}{2}\cos 2r\right)-\int\left(-\frac{1}{2}\cos 2r\right)\left(2\left(7^{2r}\right)\ln 7\,dr\right)$$

$$-\frac{1}{2}7^{2r}\cos 2r+\ln 7\int 7^{2r}\cos 2r\,dr$$

Volvemos aplicar el procedimiento de integración por parte eligiendo a la función u_2 y a la diferencial de v_2, tomando en cuenta lo que se hizo en el análisis anterior.

$$u_2=7^{2r} \qquad du_2=2\left(7^{2r}\right)\ln 7\,dr$$

$$dv_2=\cos 2r\,dr \qquad \int dv_2=\int\cos 2r\,dr \qquad v_2=\frac{1}{2}\operatorname{sen}2r+c$$

Volvemos a aplicar la fórmula de integración por partes y simplificamos.

$$-\frac{1}{2}7^{2r}\cos 2r+\ln 7\left[7^{2r}\left(\frac{1}{2}\operatorname{sen}2r\right)-\int\left(\frac{1}{2}\operatorname{sen}2r\right)\left(2\left(7^{2r}\right)\ln 7\,dr\right)\right]$$

$$-\frac{1}{2}7^{2r}\cos 2r+\frac{1}{2}7^{2r}\ln 7\,sen\,2r-\ln^2 7\int 7^{2r}\,sen\,2r\,dr$$

En este proceso se vuelve a obtener la integral del inicio, procedemos a despejarla para tener la integral deseada.

$$\int 7^{2r}\,sen\,2r\,dr=-\frac{1}{2}7^{2r}\cos 2r+\frac{1}{2}7^{2r}\ln 7\,sen\,2r-\ln^2 7\int 7^{2r}\,sen\,2r\,dr$$

Al despejar la integral, se debe de sumar la constante de integración sólo en el lado derecho.

$$\int 7^{2r}\,sen\,2r\,dr+\ln^2 7\int 7^{2r}\,sen\,2r\,dr=\frac{1}{2}7^{2r}\left(\ln 7\,sen\,2r-\cos 2r\right)+c$$

$$\left(1+\ln^2 7\right)\int 7^{2r}\,sen\,2r\,dr=\frac{7^{2r}}{2}\left(\ln 7\,sen\,2r-\cos 2r\right)+c$$

$$\int 7^{2r}\,sen\,2r\,dr=\frac{7^{2r}}{2\left(1+\ln^2 7\right)}\left(\ln 7\,sen\,2r-\cos 2r\right)+c$$

Por lo tanto: $\int 7^{2r}\,sen\,2r\,dr=\frac{7^{2r}}{2\left(1+\ln^2 7\right)}\left(\ln 7\,sen\,2r-\cos 2r\right)+c$

Ejercicios:

1. $\int e^{\frac{x}{2}}\,sen\frac{x}{2}\,dx$ R: $e^{\frac{x}{2}}\left(sen\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)+c$.
2. $\int e^{2x}\cos 3x\,dx$ R: $\frac{1}{13}e^{2x}\left(3sen\,3x+2\cos 3x\right)+c$.
3. $\int sen\left(3x-1\right)\cos\left(4x+1\right)dx$ R: $\frac{4}{7}sen\left(3x-1\right)sen\left(4x+1\right)+\frac{3}{7}\cos\left(3x-1\right)\cos\left(4x+1\right)+c+c$.
4. $\int \cos 3x\cos 2x\,dx$ R: $\frac{3}{5}sen\,3x\cos 2x-\frac{2}{5}\cos 3x\,sen\,2x+c$.
5. $\int sen\frac{x}{2}\,sen\frac{x}{3}\,dx$ R: $\frac{12}{5}\cos\frac{1}{3}x\,sen\frac{1}{2}x-\frac{18}{5}sen\frac{1}{3}x\cos\frac{1}{2}x+c$.
6. $\int \sec^3\frac{\phi}{2}\,d\phi$ R: $\tan\frac{1}{2}\phi\sec\frac{1}{2}\phi+\ln\left|\tan\frac{1}{2}\phi+\sec\frac{1}{2}\phi\right|+c$.
7. $\int \csc^3\phi\,d\phi$ R: $-\frac{1}{2}\cot\phi\csc\phi+\ln\sqrt{\left|\csc\phi-\cot\phi\right|}+c$.
8. $\int sen\left(\ln y\right)dy$ R: $\frac{1}{2}y\left[sen\left(\ln y\right)-\cos\left(\ln y\right)\right]+c$

D) Integrales tipo $\int A_1\left(x\right)A_2\left(x\right)dx$ *, donde ambas funciones son algebraicas:*

Ejemplo: $\int\frac{x^5}{\sqrt{1-x^3}}dx$

Solución: Observamos que la integral sólo contiene expresiones algebraicas, podemos hacer algunos cambio como transformar el radical a potencia y ubicarla en el numerador con una ley de los exponentes.

$$\int x^5\left(1-x^3\right)^{-\frac{1}{2}}dx$$

Una vez hecho esto, consideramos la función que está elevada a la menos un medio y obtenemos su diferencial.

$$w=1-x^3$$
$$dw=-3x^2dx$$
$$-\frac{dw}{3}=x^2dx$$

Como observamos necesitamos la variable x cuadrática, que podemos separar (como factor) de la variable a la quinta, por lo tanto tenemos que:

$$\int x^3\left(1-x^3\right)^{-\frac{1}{2}}x^2dx$$

En este caso tenemos dos funciones algebraicas que se están multiplicando, por lo tanto la función algebraica que sea más fácil de derivar es la que se va elegir como u.

$$u_1=x^3$$
$$du_1=3x^2dx$$

$$dv_1=\left(1-x^3\right)^{-\frac{1}{2}}x^2\,dx$$
$$\int dv_1=\int\left(1-x^3\right)^{-\frac{1}{2}}x^2\,dx$$
$$v_1=-\frac{2}{3}\left(1-x^3\right)^{\frac{1}{2}}+c$$

Sustituimos en la fórmula de integral por partes y simplificamos.

$$x^3\left(-\frac{2}{3}\left(1-x^3\right)^{\frac{1}{2}}\right)-\int-\frac{2}{3}\left(1-x^3\right)^{\frac{1}{2}}\left(3x^2dx\right)$$
$$-\frac{2}{3}x^3\left(1-x^3\right)^{\frac{1}{2}}+2\int\left(1-x^3\right)^{\frac{1}{2}}x^2dx$$

Del análisis que hicimos al iniciar el ejercicio, sustituimos $1-x^3$ por w en la integral, aplicamos las formulas necesarias para integrar y simplificamos.

$$-\frac{2}{3}x^3\left(1-x^3\right)^{\frac{1}{2}}-\frac{2}{3}\int w^{\frac{1}{2}}\,dw$$
$$-\frac{2}{3}x^3\left(1-x^3\right)^{\frac{1}{2}}-\frac{2}{3}\left(\frac{w^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)+c$$
$$-\frac{2}{3}x^3\left(1-x^3\right)^{\frac{1}{2}}-\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}w\,w^{\frac{1}{2}}\right)+c$$
$$-\frac{2}{3}x^3\left(1-x^3\right)^{\frac{1}{2}}-\frac{4}{9}\left(1-x^3\right)\left(1-x^3\right)^{\frac{1}{2}}+c$$
$$-\frac{2}{3}\left(1-x^3\right)^{\frac{1}{2}}\left(x^3-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}x^3\right)+c$$
$$-\frac{2}{3}\sqrt{1-x^3}\left(\frac{5}{3}x^3-\frac{2}{3}\right)+c$$

$$-\frac{2}{9}\left(5x^3-2\right)\sqrt{1-x^3}+c$$

Por lo tanto: $\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^3}}dx = -\frac{2}{9}\left(5x^3-2\right)\sqrt{1-x^3}+c$

Ejercicios:

1. $\int x(1+2x)^6\,dx$ R: $\frac{1}{112}\left(7x-\frac{1}{2}\right)(1+2x)^7+c$.
2. $\int \frac{x^3}{\left(4+x^2\right)^2}dx$ R: $ln\sqrt{4+x^2}-\frac{x^2}{2\left(4+x^2\right)}+c$.
3. $\int x(2x+3)^5\,dx$ R: $\frac{1}{28}\left(2x-\frac{1}{2}\right)(2x+3)^6+c$.
4. $\int (x+1)^{10}(x+2)\,dx$ R: $\frac{1}{132}(11x-23)(x+1)^{11}+c$.
5. $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx$ R: $\frac{1}{3}\left(x^2-2\right)\sqrt{x^2+1}+c$.
6. $\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^3}}dx$ R: $-\frac{2}{9}\left(x^3+2\right)\sqrt{1-x^3}+c$.
7. $\int x^2(3-x)^{-\frac{1}{2}}dx$ R: $-\frac{2}{5}\left(x^2+4x-24\right)\sqrt{3-x}+c$.
8. $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} x^3\sqrt{1-x^2}\,dx$ R: $\frac{47}{480}$.

POTENCIAS TRIGONOMETRICAS.

Como su nombre lo indica es un método para integrar ciertos casos de funciones trigonométricas que están elevadas a un exponente mayor que el cuadrático; para abordar este tema se clasificaron en 4 tipos diferentes.

A) *Potencias con exponente entero impar.*

i) $\int sen^n w\,dw$, $\int cos^n w\,dw$, se expresan como: $\int sen^n w\,dw = \int\left[sen^2 w\right]^{\frac{n-1}{2}} sen\,w\,dw$, $\int cos^n w\,dw = \int\left[cos^2 w\right]^{\frac{n-1}{2}} cos\,w\,dw$.

Posteriormente sustituir mediante la identidad trigonométrica pitagórica el cuadrado del seno, o coseno, en términos del coseno, o del seno, respectivamente.

$$sen^2A = 1-cos^2A \qquad cos^2A = 1-sen^2A$$

Ejemplo: $\int sen^5\frac{x}{5}dx$.

Solución: Aplicamos la separación la separación descrita anteriormente.

$$\int\left[sen^2\frac{x}{5}\right]^{\frac{5-1}{2}} sen\frac{x}{5}dx$$

Aplicamos la identidad trigonométrica para el seno cuadrado y simplificamos.

$$\int\left[1-cos^2\frac{x}{5}\right]^2 sen\frac{x}{5}dx$$

$$\int\left[1-2cos^2\frac{x}{5}+cos^4\frac{x}{5}\right]sen\frac{x}{5}dx$$

Separamos en tres integrales y analizamos la integral.

$$\int sen\frac{x}{5}dx-2\int cos^2\frac{x}{5}sen\frac{x}{5}dx+\int cos^4\frac{x}{5}sen\frac{x}{5}dx$$

$$u=cos\frac{x}{5}$$

$$du=-\frac{1}{5}sen\frac{x}{5}dx$$

$$-5du=sen\frac{x}{5}dx$$

Sustituimos los datos en la integral, aplicamos las fórmulas necesarias y simplificamos la integral:

$$\int(-5du)-2\int u^2(-5du)+\int u^4(-5du)$$

$$-5\int du+10\int u^2du-5\int u^4du$$

$$-5u+10\left(\frac{u^3}{3}\right)-5\left(\frac{u^5}{5}\right)+c$$

$$-cos\frac{x}{5}\left(5-\frac{10}{3}cos^2\frac{x}{5}-cos^4\frac{x}{5}\right)+c$$

Por lo tanto: $\int sen^5\frac{x}{5}dx=-cos\frac{x}{5}\left(5-\frac{10}{3}cos^2\frac{x}{5}-cos^4\frac{x}{5}\right)+c$

Ejercicios:

1. $\int sen^3\frac{w}{2}dw$ R: $2cos\frac{w}{2}\left(\frac{1}{3}cos^2\frac{w}{2}-1\right)+c$.
2. $\int cos^3 3\theta\, d\theta$ R: $\frac{1}{3}sen\,3\theta\left(1-\frac{1}{3}sen^2 3\theta\right)+c$
3. $\int cos^5 4x\,dx$ R: $\frac{1}{2}sen4x\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}sen^2 4x+\frac{1}{10}sen^4 4x\right)+c$.
4. $\int cos^7 x\,dx$ R: $sen\,x\left(1-sen^2 x+\frac{3}{5}sen^4 x-\frac{1}{7}sen^6 x\right)+c$
5. $\int sen^7 y\,dy$ R: $cos\,y\left(\frac{1}{7}cos^6 y-\frac{3}{5}cos^4 y+cos^2 y-1\right)+c$.

ii) $\int tan^n w\,dw$, $\int cot^n w\,dw$, se expresan como: $\int tan^n w\,dw = \int \left[tan^2 w\right]^{\frac{n-1}{2}} tan\,w\,dw$, $\int cot^n w\,dw = \int \left[cot^2 w\right]^{\frac{n-1}{2}} cot\,w\,dw$.

En el siguiente paso sustituir la identidad pitagórica del cuadrado de la tangente, o de la cotangente, en términos de la secante, o la cosecante, respectivamente.

$$tan^2 A = sec^2 A - 1 \qquad\qquad cot^2 A = csc^2 A - 1$$

Ejemplo: $\int cot^5 3y\,dy$

Solución: Aplicando el procedimiento para separar el integrando tenemos:

$$\int \left[cot^2 3y\right]^{\frac{5-.1}{2}} cot\,3y\,dy$$

Aplicamos la identidad trigonométrica para cotangente cuadrada y simplificamos.

$$\int \left[csc^2 3y - 1\right]^2 cot\,3y\,dy$$
$$\int \left[csc^4 3y - 2csc^2 3y + 1\right] cot\,3y\,dy$$

Separamos el integrando.

$$\int csc^4 3y\,cot\,3y\,dy - 2\int csc^2 3y\,cot\,3y\,dy + \int cot\,3y\,dy$$

Analizamos los primeros dos términos, tomando como la función u a la función trigonométrica cuyo exponente sea mayor, y en el tercero sólo analizamos el argumento de la función trigonométrica.

$$u = csc\,3y \qquad\qquad v = 3y$$
$$du = -3\,csc\,3y\,cot\,3y\,dy \qquad\qquad dv = 3dy$$
$$-\frac{du}{3} = csc\,3y\,cot\,3y\,dy \qquad\qquad \frac{dv}{3} = dy$$

Observamos que nos falta una cosecante en el primero y segundo términos (para tener completa la diferencial de la cosecante), por lo cual separaremos dicha función de la potencia de la cosecante.

$$\int csc^3 3y\,csc\,3y\,cot\,3y\,dy - 2\int csc\,3y\,csc\,3y\,cot\,3y\,dy + \int cot\,3y\,dy$$

Sustituyendo u y v, aplicamos las fórmulas correspondientes y simplificamos.

$$\int u^3\left(-\frac{du}{3}\right) - 2\int u\left(-\frac{du}{3}\right) + \int cot\,v\,\frac{dv}{3}$$
$$-\frac{1}{3}\int u^3 du + \frac{2}{3}\int u\,du + \frac{1}{3}\int cot\,v\,dv$$
$$-\frac{1}{3}\left(\frac{u^4}{4}\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{u^2}{2}\right) + \frac{1}{3} ln\left|sen\,v\right| + c$$
$$-\frac{1}{12} csc^4 3y + \frac{1}{3} csc^2 3y + ln\sqrt[3]{\left|sen\,3y\right|} + c$$

Por lo tanto: $\int cot^5 3y\,dy = -\frac{1}{12}csc^4 3y + \frac{1}{3}csc^2 3y + ln\sqrt[3]{|sen\,3y|} + c$

Nota: Este ejercicio tiene otros dos resultados equivalentes y a continuación se describirá como se obtienen.

1) Si se toma la cotangente como la función en el segundo término y se busca su diferencial, tendríamos el siguiente procedimiento.

$$u = csc\,3y \qquad du = -3\,csc\,3y\,cot\,3y\,dy \qquad -\frac{du}{3} = csc\,3y\,cot\,3y\,dy$$

$$w = cot\,3y \qquad dw = -3\,csc^2 3y\,dy \qquad -\frac{dw}{3} = csc^2 3y\,dy$$

$$v = 3y \qquad dv = 3dy \qquad \frac{dv}{3} = dy$$

Por lo tanto separaríamos a la cosecante para obtener el diferencial, y como siempre obtiene un exponente par se aplicaría la identidad pitagórica correspondiente.

$$\int csc^3 3y\,csc\,3y\,cot\,3y\,dy - 2\int csc^2 3y\,cot\,3y\,dy + \int cot\,3y\,dy$$

$$\int u^3\left(-\frac{du}{3}\right) - 2\int w\left(-\frac{dw}{3}\right) + \int cot\,v\frac{dv}{3}$$

$$-\frac{1}{3}\int u^3 du + \frac{2}{3}\int w\,dw + \frac{1}{3}\int cot\,v\,dv$$

$$-\frac{1}{3}\left(\frac{u^4}{4}\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{w^2}{2}\right) + \frac{1}{3}ln|sen\,v| + c$$

$$-\frac{1}{12}csc^4 3y + \frac{1}{3}cot^2 3y + ln\sqrt[3]{|sen\,3y|} + c$$

Por lo tanto: $\int cot^5 3y\,dy = -\frac{1}{12}csc^4 3y + \frac{1}{3}cot^2 3y + ln\sqrt[3]{|sen\,3y|} + c$

2) Si tomamos a la cotangente como la función en el primer y segundo términos, y buscamos su diferencial.

$$u = cot\,3y \qquad du = -3\,csc^2 3y\,dy \qquad -\frac{du}{3} = csc^2 3y\,dy$$

$$v = 3y \qquad dv = 3dy \qquad \frac{dv}{3} = dy$$

Ahora tendremos que aplicar identidades para simplificar la cosecante cuarta del primer término y simplificamos.

$$\int csc^2 3y\,csc^2 3y\,cot\,3y\,dy - 2\int csc^2 3y\,cot\,3y\,dy + \int cot\,3y\,dy$$

$$\int \left(cot^2 3y + 1\right)csc^2 3y\,cot\,3y\,dy - 2\int csc^2 3y\,cot\,3y\,dy + \int cot\,3y\,dy$$

$$\int cot^2 3y\,csc^2 3y\,cot\,3y\,dy + \int csc^2 3y\,cot\,3y\,dy - 2\int csc^2 3y\,cot\,3y\,dy + \int cot\,3y\,dy$$

$$\int cot^3 3y\,csc^2 3y\,dy - \int csc^2 3y\,cot\,3y\,dy + \int cot\,3y\,dy$$

Sustituimos la cotangente y la cosecante por u y du en las integrales y aplicamos las fórmulas correspondientes:

$$\int u^3\left(-\frac{du}{3}\right)-\int u\left(-\frac{du}{3}\right)+\int \cot v\,\frac{dv}{3}$$

$$-\frac{1}{3}\int u^3du+\frac{1}{3}\int u\,du+\frac{1}{3}\int \cot v\,dv$$

$$-\frac{1}{3}\left(\frac{u^4}{4}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{u^2}{2}\right)+\frac{1}{3}ln|sen\,v|+c$$

$$-\frac{1}{12}\cot^4 3y+\frac{1}{6}\cot^2 3y+\frac{1}{3}ln\sqrt[3]{|sen\,3y|}+c$$

Por lo tanto: $\int \cot^5 3y\,dy=-\frac{1}{12}\cot^4 3y+\frac{1}{6}\cot^2 3y+\frac{1}{3}ln\sqrt[3]{|sen\,3y|}+c$

Ejercicios:

1. $\int \cot^3 2\theta\,d\theta$

R: $-\frac{1}{4}\csc^2 2\theta-ln\sqrt{|sen\,2\theta|}+c$

$-\frac{1}{4}\cot^2 2\theta-ln\sqrt{|sen\,2\theta|}+c$

2. $\int \tan^3\frac{x}{2}dx$

R: $\sec^2\frac{1}{2}x-ln\left(\sec^2\frac{1}{2}x\right)+c$

$\tan^2\frac{1}{2}x-ln\left(\sec^2\frac{1}{2}x\right)+c$

3. $\int \tan^5\rho\,d\rho$

R: $\frac{1}{4}\sec^4\rho-\sec^2\rho+ln|\sec\rho|+c$

$\frac{1}{4}\sec^4\rho-\tan^2\rho+ln|\sec\rho|+c$

$\frac{1}{4}\tan^4\rho-\frac{1}{2}\tan^2\rho+ln|\sec\rho|+c$

4. $\int \cot^7(1-r)\,dr$

R: $\frac{1}{6}\csc^6(1-r)-\frac{3}{4}\csc^4(1-r)+\frac{3}{2}\csc^2(1-r)+ln|sen(1-r)|+c$

$\frac{1}{6}\csc^6(1-r)-\frac{3}{4}\csc^4(1-r)+\frac{3}{2}\cot^2(1-r)+ln|sen(1-r)|+c$

$\frac{1}{6}\cot^6(1-r)-\frac{1}{4}\cot^4(1-r)+\frac{1}{2}\cot^2(1-r)+ln|sen(1-r)|+c$

5. $\int \tan^7 3x\,dx$

R: $\frac{1}{18}\sec^6 3x-\frac{1}{4}\sec^4 3x+\frac{1}{2}\sec^2 3x-ln\sqrt[3]{|\sec 3x|}+c$

$\frac{1}{18}\sec^6 3x-\frac{1}{4}\sec^4 3x+\frac{1}{2}\tan^2 3x-ln\sqrt[3]{|\sec 3x|}+c$

$\frac{1}{18}\tan^6 3x-\frac{1}{12}\tan^4 3x+\frac{1}{6}\tan^2 3x-ln\sqrt[3]{|\sec 3x|}+c$

iii) $\int \sec^n w\,dw$, $\int \csc^n w\,dw$, para estos casos se aplicará el método de integración por partes considerando respectivamente:

$u=\sec^{n-2}w\,,\ dv=\sec^2 w\,dw$ $\qquad$ $u=\csc^{n-2}w\,,\ dv=\csc^2 w\,dw$

Ejemplo: $\int sec^3\frac{\theta}{2}d\theta$

Solución: De acuerdo con lo propuesto para esta estrategia, procedemos a separar la secante de tal forma que nos quede una cuadrática por el producto de otra elevada a la n-esima potencia, para después utilizar la fórmula de integración por partes.

$$\int sec\frac{\theta}{2}sec^2\frac{\theta}{2}d\theta$$

$$u = sec\frac{\theta}{2} \qquad dv = sec^2\frac{\theta}{2}d\theta$$

$$du = \frac{1}{2}sec\frac{\theta}{2}tan\frac{\theta}{2}d\theta \qquad \int dv = \int sec^2\frac{\theta}{2}d\theta$$

$$v = 2tan\frac{\theta}{2}+c$$

Aplicamos la fórmula de integración por partes y simplificamos.

$$sec\frac{\theta}{2}2tan\frac{\theta}{2} - \int 2tan\frac{\theta}{2}\left(\frac{1}{2}sec\frac{\theta}{2}tan\frac{\theta}{2}d\theta\right)$$

$$2sec\frac{\theta}{2}tan\frac{\theta}{2} - \int tan^2\frac{\theta}{2}sec\frac{\theta}{2}d\theta$$

Aplicamos la identidad pitagórica para tangente cuadrada.

$$2sec\frac{\theta}{2}tan\frac{\theta}{2} - \int\left(sec^2\frac{\theta}{2}-1\right)sec\frac{\theta}{2}d\theta$$

$$2sec\frac{\theta}{2}tan\frac{\theta}{2} - \int sec^3\frac{\theta}{2}d\theta + \int sec\frac{\theta}{2}d\theta$$

Despejamos la integral de secante cubica y analizamos la integral que queda en el lado derecho de la igualdad.

$$\int sec^3\frac{\theta}{2}d\theta = 2sec\frac{\theta}{2}tan\frac{\theta}{2} - \int sec^3\frac{\theta}{2}d\theta + \int sec\frac{\theta}{2}d\theta$$

$$\int sec^3\frac{\theta}{2}d\theta + \int sec^3\frac{\theta}{2}d\theta = 2sec\frac{\theta}{2}tan\frac{\theta}{2} + \int sec\frac{\theta}{2}d\theta$$

$$w = \frac{\theta}{2}$$

$$dw = \frac{1}{2}d\theta$$

$$2dw = d\theta$$

Sustituyendo, aplicamos las formulas correspondientes para integrar y simplificando tenemos:

$$2\int sec^3\frac{\theta}{2}d\theta = 2sec\frac{\theta}{2}tan\frac{\theta}{2} + \int sec\,w\,2dw$$

$$\int sec^3\frac{\theta}{2}d\theta = \frac{1}{2}\left(2sec\frac{\theta}{2}tan\frac{\theta}{2} + 2ln|sec\,w + tan\,w| + c\right)$$

$$\int sec^3\frac{\theta}{2}d\theta = sec\frac{\theta}{2}tan\frac{\theta}{2} + ln\left|sec\frac{\theta}{2} + tan\frac{\theta}{2}\right| + c$$

Ejercicios:

1. $\int csc^3 y\,dy$ R: $ln\sqrt{|csc\,y - cot\,y|} - \frac{1}{2}csc\,y\,cot\,y + c$.

2. $\int sec^3 \frac{3}{2}t\,dt$ R: $\frac{1}{3}tan\frac{3}{2}t\,sec\frac{3}{2}t + ln\sqrt[3]{\left|sec\frac{3}{2}t + tan\frac{3}{2}t\right|} + c$.

3. $\int sec^5 \frac{x}{2}dx$ R: $\frac{1}{2}sec^3\frac{x}{2}tan\frac{x}{2} + \frac{3}{4}sec\frac{x}{2}tan\frac{x}{2} + ln\sqrt[4]{\left|sec\frac{x}{2} + tan\frac{x}{2}\right|^3} + c$.

4. $\int csc^5 3\theta\,d\theta$ R: $-\frac{1}{12}csc^3 3\theta\,cot\,3\theta - \frac{1}{8}csc\,3\theta\,cot\,3\theta + ln\sqrt[8]{|csc\,3\theta - cot\,3\theta|} + c$.

5. $\int sec^7 \theta\,d\theta$ R: $\frac{1}{6}sec^5\theta\,tan\,\theta + \frac{5}{24}sec^3\theta\,tan\,\theta + \frac{5}{16}sec\,\theta\,tan\,\theta + ln\sqrt[16]{|sec\,\theta + tan\,\theta|^5} + c$.

B) *Potencias con exponente entero par.*

i) $\int sen^n w\,dw$, $\int cos^n w\,dw$, se expresan como: $\int sen^n w\,dw = \int\left[sen^2 w\right]^{\frac{n}{2}}dw$, $\int cos^n w\,dw = \int\left[cos^2 w\right]^{\frac{n}{2}}dw$.

Posteriormente (debemos) sustituir el cuadrado del seno o el coseno mediante las identidades trigonométricas de "ángulo mitad", desarrollando (las potencias de) los binomios correspondientes.

$$sen^2 A = \frac{1}{2}(1 - cos\,2A) \qquad cos^2 A = \frac{1}{2}(1 + cos\,2A)$$

Ejemplo: $\int cos^4 5x\,dx$

Solución: Aplicamos el procedimiento para exponente par y simplificamos.

$$\int\left[cos^2 5x\right]^{\frac{4}{2}}dx$$

$$\int\left[\frac{1}{2}(1 + cos\,10x)\right]^2 dx$$

$$\int\frac{1}{4}(1 + cos\,10x)^2 dx$$

$$\frac{1}{4}\int\left(1 + 2cos\,10x + cos^2 10x\right)dx$$

Observamos que todavía tenemos una función trigonométrica elevada a una potencia par, por lo tanto le aplicamos otra vez el procedimiento anterior nada más a la que esta elevada al cuadrado y simplificamos.

$$\frac{1}{4}\int\left(1 + 2cos\,10x + \left[cos^2 10x\right]^{\frac{2}{2}}\right)dx$$

$$\frac{1}{4}\int\left(1 + 2cos\,10x + \left[\frac{1}{2}(1 + cos\,20x)\right]\right)dx$$

$$\frac{1}{4}\int\left(1 + 2cos\,10x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}cos\,20x\right)dx$$

$$\frac{1}{4}\int\left(\frac{3}{2}+2cos10x+\frac{1}{2}cos\,20x\right)dx$$

Separamos en tres integrales, analizamos cada uno de los argumentos de las funciones trigonométricas, aplicamos las fórmulas correspondientes y simplificamos.

$$\frac{1}{4}\int\frac{3}{2}dx+\frac{1}{4}\int 2cos10x\,dx+\frac{1}{4}\int\frac{1}{2}cos\,20x\,dx$$

$$\frac{3}{8}\int dx+\frac{1}{2}\int cos10x\,dx+\frac{1}{8}\int cos\,20x\,dx$$

$$u=10x \qquad v=20x$$
$$du=10dx \qquad dv=20dx$$
$$\frac{du}{10}=dx \qquad \frac{dv}{20}=dx$$

$$\frac{3}{8}\int dx+\frac{1}{2}\int cos\,u\frac{du}{10}+\frac{1}{8}\int cos\,v\frac{dv}{20}$$

$$\frac{3}{8}\int dx+\frac{1}{20}\int cos\,u\,du+\frac{1}{160}\int cos\,v\,dv$$

$$\frac{3}{8}x+\frac{1}{20}sen\,u+\frac{1}{160}sen\,v+c$$

$$\frac{3}{8}x+\frac{1}{20}sen\,10x+\frac{1}{160}sen\,20x+c$$

Por lo tanto: $\int cos^4 5x\,dx=\frac{3}{8}x+\frac{1}{20}sen\,10x+\frac{1}{160}sen\,20x+c$

Ejercicios:

1. $\int\frac{cos^2(ln\,w)}{w}dw$ R: $\frac{1}{2}ln|w|+\frac{1}{4}sen\left(ln\,w^2\right)+c$.
2. $\int sen^2\frac{\pi x}{4}dx$ R: $\frac{x}{2}-\frac{1}{\pi}sen\frac{\pi}{2}x+c$.
3. $\int sen^4\frac{x}{3}dx$ R: $\frac{3}{8}x-\frac{3}{4}sen\frac{2}{3}x+\frac{3}{32}sen\frac{4}{3}x+c$.
4. $\int cos^6 3x\,dx$ R: $\frac{5}{16}x+\frac{1}{12}sen6x+\frac{1}{64}sen12x-\frac{1}{144}sen^3 6x+c$.
5. $\int sen^6\theta\,d\theta$ R: $\frac{5}{16}\theta-\frac{1}{4}sen\,2\theta+\frac{3}{64}sen\,4\theta+\frac{1}{48}sen^3\,2\theta+c$

ii) $\int sec^n w\,dw$, $\int csc^n w\,dw$, se expresan de la siguiente forma:

$$\int sec^n w\,dw=\int\left[sec^2 w\right]^{\frac{n-2}{2}}sec^2 w\,dw$$

$$\int csc^n w\,dw=\int\left[csc^2 w\right]^{\frac{n-2}{2}}csc^2 w\,dw$$

De esta forma será posible expresar la potencia de la secante y de la cosecante en términos de del cuadrado de la tangente o de la cotangente, ya que la diferencial de la tangente es la secante cuadrada, y la de la cotangente es cosecante cuadrada. Las identidades pitagóricas para lograr lo anterior son:

$$sec^2 A=tan^2 A+1 \qquad csc^2 A=cot^2 A+1$$

Ejemplo: $\int sec^4\frac{3\theta}{2}d\theta$

Solución: Aplicando el procedimiento y simplificando:

$$\int\left[\sec^2\frac{3\theta}{2}\right]^{\frac{4-2}{2}}\sec^2\frac{3\theta}{2}\,d\theta$$
$$\int\left[1+\tan^2\frac{3\theta}{2}\right]\sec^2\frac{3\theta}{2}\,d\theta$$
$$\int\sec^2\frac{3\theta}{2}\,d\theta+\int\tan^2\frac{3\theta}{2}\sec^2\frac{3\theta}{2}\,d\theta$$

Analizando la segunda integral tenemos.

$$u=\tan\frac{3}{2}\theta$$
$$du=\frac{3}{2}\sec^2\frac{3}{2}\theta\,d\theta$$
$$\frac{2}{3}du=\sec^2\frac{3}{2}\theta\,d\theta$$

Sustituimos, aplicamos las fórmulas de integrales correspondientes y simplificamos.

$$\int\frac{2}{3}du+\int u^2\frac{2}{3}du$$
$$\frac{2}{3}\int du+\frac{2}{3}\int u^2du$$
$$\frac{2}{3}u+\frac{2}{3}\left(\frac{u^3}{3}\right)+c$$
$$\frac{2}{3}\tan\frac{3}{2}\theta\left(1+\frac{1}{3}\tan^3\frac{3}{2}\theta\right)+c$$

Por lo tanto: $\int\sec^4\frac{3\theta}{2}\,d\theta=\frac{2}{3}\tan\frac{3}{2}\theta\left(1+\frac{1}{3}\tan^3\frac{3}{2}\theta\right)+c$

Ejemplo:

1. $\int\csc^4 3\phi\,d\phi$ R: $-\frac{1}{3}\cot 3\phi\left(\frac{1}{3}\cot^2 3\phi-1\right)+c$.
2. $\int\sec^6\frac{\lambda}{2}\,d\lambda$ R: $\tan\frac{\lambda}{2}\left(\frac{1}{10}\tan^4\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{3}\tan^2\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{2}\right)+c$.
3. $\int\csc^6 3x\,dx$ R: $-\frac{1}{3}\cot 3x\left(\frac{1}{5}\cot^4 3x+\frac{2}{3}\cot^2 3x+1\right)+c$
4. $\int\csc^8 y\,dy$ R: $-\cot y\left(1+\cot^2 y+\frac{3}{5}\cot^4 y+\frac{1}{7}\cot^6 y\right)+c$.
5. $\int\sec^8\theta\,d\theta$ R: $\tan\theta\left(\frac{1}{7}\tan^6\theta+\frac{3}{5}\tan^4\theta+\tan^2\theta+1\right)+c$

iii) $\int tan^n w\,dw$, $\int cot^n w\,dw$, se expresan como: $\int tan^n w\,dw = \int \left[tan^2 w\right]^{\frac{n}{2}} dw$, $\int cot^n w\,dw = \int \left[cot^2 w\right]^{\frac{n}{2}} dw$.

Y posteriormente, sustituir mediante la identidad pitagórica el cuadrado de la tangente o de la cotangente en términos de secante o cosecante respectivamente.

$$tan^2 A = sec^2 A - 1 \qquad\qquad cot^2 A = csc^2 A - 1$$

Ejemplo: $\int cot^4 \frac{2x}{3} dx$

Solución: Aplicamos el procedimiento para separar la función trigonométrica.

$$\int \left[cot^2 \frac{2x}{3}\right]^{\frac{4}{2}} dx$$

$$\int \left[csc^2 \frac{2x}{3} - 1\right]^2 dx$$

$$\int \left[csc^4 \frac{2x}{3} - 2csc^2 \frac{2x}{3} + 1\right] dx$$

Separamos al integrando y en el primer miembro aparece una cosecante elevada a la cuarta, aplicamos el procedimiento para potencia par de cosecante.

$$\int csc^4 \frac{2x}{3} dx - 2\int csc^2 \frac{2x}{3} dx + \int dx$$

$$\int \left[csc^2 \frac{2x}{3}\right]^{\frac{4-2}{2}} csc^2 \frac{2x}{3} dx - 2\int csc^2 \frac{2x}{3} dx + \int dx$$

$$\int \left[cot^2 \frac{2x}{3} + 1\right] csc^2 \frac{2x}{3} dx - 2\int csc^2 \frac{2x}{3} dx + \int dx$$

$$\int cot^2 \frac{2x}{3} csc^2 \frac{2x}{3} dx + \int csc^2 \frac{2x}{3} dx - 2\int csc^2 \frac{2x}{3} dx + \int dx$$

$$\int cot^2 \frac{2x}{3} csc^2 \frac{2x}{3} dx - \int csc^2 \frac{2x}{3} dx + \int dx$$

Analizamos la integral haciendo la función u igual a la cotangente y obtenemos su diferencial.

$$u = cot \frac{2}{3} x$$

$$du = -\frac{2}{3} csc^2 \frac{2}{3} x\,dx$$

$$-\frac{3}{2} du = csc^2 \frac{2}{3} x\,dx$$

Sustituyendo en la integral, aplicamos las formulas correspondientes para resolverla y simplificamos.

$$\int u^2 \left(-\frac{3}{2} du\right) - \int \left(-\frac{3}{2} du\right) + \int dx$$

$$-\frac{3}{2}\int u^2du+\frac{3}{2}\int du+\int dx$$

$$-\frac{3}{2}\left(\frac{u^3}{3}\right)+\frac{3}{2}u+x+c$$

$$-\frac{1}{2}cot^3\frac{2}{3}x+\frac{3}{2}cot\frac{2}{3}x+x+c$$

Ejercicios:

1. $\int cot^2 4x\,dx$ R: $-\frac{1}{4}cot\,4x-x+c$
2. $\int tan^4\frac{\phi}{3}d\phi$ R: $tan^3\frac{1}{3}\phi-3\,tan\frac{1}{3}\phi+\phi+c$.
3. $\int cot^4 x\,dx$ R: $-\frac{1}{3}cot^3 x+cot\,x+x+c$
4. $\int cot^6 3\psi\,d\psi$ R: $-\frac{1}{15}cot^5 3\psi+\frac{1}{9}cot^3 3\psi-\frac{1}{3}cot\,3\psi-\psi+c$.
5. $\int cot^8\frac{t}{2}dt$ R: $-\frac{2}{7}cot^7\frac{t}{2}+\frac{2}{5}cot^5\frac{t}{2}-\frac{2}{3}cot^3\frac{t}{2}+2\,cot\frac{t}{2}+t+c$

C) *Producto de potencias:* $\int sen^m w\,cos^n w\,dw$.

i) Para m y n enteros pares expresar la integral como: $\int sen^m w\,cos^n w\,dw=\int\left[sen^2 w\right]^{\frac{m}{2}}\left[cos^2 w\right]^{\frac{n}{2}}dw$

Al sustituir las identidades de ángulo mitad para el seno y el coseno al cuadrado respectivamente; al efectuar las operaciones se generaran integrales de menor grado.

Ejemplo: $\int sen^4 x\,cos^4 x\,dx$

Solución: Aplicamos el procedimiento para el producto seno coseno de potencia par y simplificamos.

$$\int\left[sen^2 x\right]^{\frac{4}{2}}\left[cos^2 x\right]^{\frac{4}{2}}dx$$

$$\int\left[\frac{1}{2}(1-cos2x)\right]^2\left[\frac{1}{2}(1+cos2x)\right]^2dx$$

$$\int\frac{1}{4}(1-cos2x)^2\frac{1}{4}(1+cos2x)^2dx$$

$$\int\frac{1}{16}\left[(1-cos2x)(1+cos2x)\right]^2dx$$

$$\frac{1}{16}\int\left(1-cos^2 2x\right)^2dx$$

Aplicamos el procedimiento al coseno cuadrado resultante y simplificamos.

$$\frac{1}{16}\int\left(1-\frac{1}{2}[1+cos4x]\right)^2dx$$

$$\frac{1}{16}\int\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}cos4x\right)^2dx$$

$$\frac{1}{16}\int\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 4x\right)^2 dx$$

$$\frac{1}{16}\int\left(\frac{1}{2}[1-\cos 4x]\right)^2 dx$$

$$\frac{1}{16}\int\frac{1}{4}(1-\cos 4x)^2 dx$$

$$\frac{1}{64}\int\left(1-2\cos 4x+\cos^2 4x\right)dx$$

Aplicamos la identidad de ángulo mitad en el coseno cuadrático, separamos al integrando y simplificamos.

$$\frac{1}{64}\int\left(1-2\cos 4x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 8x\right)dx$$

$$\frac{1}{64}\int\left(\frac{3}{2}-2\cos 4x+\frac{1}{2}\cos 8x\right)dx$$

$$\frac{3}{128}\int dx-\frac{1}{32}\int\cos 4x\,dx+\frac{1}{128}\int\cos 8x\,dx$$

Analizamos los argumentos de la segunda y tercera integral.

$$u=4x \qquad du=4dx \qquad \frac{du}{4}=dx$$

$$v=8x \qquad dv=8dx \qquad \frac{dv}{8}=dx$$

Sustituimos, aplicamos las formulas requeridas y simplificamos.

$$\frac{3}{128}\int dx-\frac{1}{32}\int\cos u\frac{du}{4}+\frac{1}{128}\int\cos v\frac{dv}{8}$$

$$\frac{3}{128}\int dx-\frac{1}{128}\int\cos u\,du+\frac{1}{1024}\int\cos v\,dv$$

$$\frac{3}{128}x-\frac{1}{128}\operatorname{sen} u+\frac{1}{1024}\operatorname{sen} v+c$$

$$\frac{3}{128}x-\frac{1}{128}\operatorname{sen} 4x+\frac{1}{1024}\operatorname{sen} 8x+c$$

Por lo tanto: $\int \operatorname{sen}^4 x\cos^4 x\,dx=\frac{3}{128}x-\frac{1}{128}\operatorname{sen} 4x+\frac{1}{1024}\operatorname{sen} 8x+c$

Nota: El procedimiento que veremos a continuación es una estrategia que se usa sólo cuando el producto seno por coseno tiene el mismo exponente par, como en el ejemplo que acabamos de hacer.

Ejemplo: $\int \operatorname{sen}^4 x\cos^4 x\,dx$

Solución: Primero aplicamos una ley de los exponentes para dejar a todos elevados a la misma potencia.

$$\int(\operatorname{sen} x\cos x)^4\,dx$$

Aplicamos las identidades de ángulo doble.

$$\int\left(\frac{1}{2}sen\,2x\right)^4 dx$$

$$\int\frac{1}{16}sen^4\,2x\,dx$$

Ahora aplicamos el procedimiento para la potencia par de seno.

$$\frac{1}{16}\int\left[sen^2\,2x\right]^{\frac{4}{2}}dx$$

$$\frac{1}{16}\int\left[\frac{1}{2}(1-\cos 4x)\right]^2 dx$$

$$\frac{1}{16}\int\frac{1}{4}(1-\cos 4x)^2 dx$$

$$\frac{1}{64}\int\left(1-2\cos 4x+\cos^2 4x\right)dx$$

Aplicamos la identidad de ángulo mitad en el coseno cuadrático, separamos al integrando y simplificamos.

$$\frac{1}{64}\int\left(1-2\cos 4x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 8x\right)dx$$

$$\frac{1}{64}\int\left(\frac{3}{2}-2\cos 4x+\frac{1}{2}\cos 8x\right)dx$$

$$\frac{3}{128}\int dx-\frac{1}{32}\int\cos 4x\,dx+\frac{1}{128}\int\cos 8x\,dx$$

Analizando la segunda y tercera) integral.

$$u=4x \qquad\qquad v=8x$$

$$du=4dx \qquad\qquad dv=8\,dx$$

$$\frac{du}{4}=dx \qquad\qquad \frac{dv}{8}=dx$$

Sustituimos en la integral, aplicamos las formulas requeridas y simplificamos.

$$\frac{3}{128}\int dx-\frac{1}{32}\int\cos u\frac{du}{4}+\frac{1}{128}\int\cos v\frac{dv}{8}$$

$$\frac{3}{128}\int dx-\frac{1}{128}\int\cos u\,du+\frac{1}{1024}\int\cos v\,dv$$

$$\frac{3}{128}x-\frac{1}{128}sen\,u+\frac{1}{1024}sen\,v+c$$

$$\frac{3}{128}x-\frac{1}{128}sen\,4x+\frac{1}{1024}sen\,8x+c$$

Por lo tanto: $\int sen^4\,x\cos^4\,x\,dx=\frac{3}{128}x-\frac{1}{128}sen\,4x+\frac{1}{1024}sen\,8x+c$

Ejercicios:

1. $\int sen^2\frac{x}{4}\cos^2\frac{x}{4}dx$ R: $\frac{1}{8}x-\frac{1}{8}sen\,x+c$.

2. $\int sen^2 \frac{3x}{2} cos^4 \frac{3x}{2} dx$ R: $\frac{1}{16}x - \frac{1}{96} sen\, 6x + \frac{1}{72} sen^3 3x + c$.

3. $\int sen^6 \frac{2x}{3} cos^4 \frac{2x}{3} dx$ R: $\frac{3}{256}x - \frac{3}{512} sen \frac{8}{3}x + \frac{3}{4096} sen \frac{16}{3}x - \frac{3}{640} sen^5 \frac{4}{3}x + c$.

4. $\int sen^2 \frac{x}{4} cos^6 \frac{x}{4} dx$ R: $\frac{5}{128}x - \frac{1}{32} sen\, x + \frac{1}{12} sen^3 \frac{1}{2}x - \frac{1}{256} sen\, 2x + c$.

5. $\int sen^4 \frac{x}{4} cos^6 \frac{x}{4} dx$ R: $\frac{3}{256}x - \frac{1}{64} sen\, x + \frac{1}{512} sen\, 2x + \frac{1}{80} sen^5 \frac{1}{2}x + c$.

ii) Para n entero impar, la integral se escribirá de la siguiente forma:

$$\int sen^m w \cos^n w\, dw = \int sen^m w \left[\cos^2 w\right]^{\frac{n-1}{2}} \cos w\, dw$$

$$\int sen^n w \cos^m w\, dw = \int \cos^m w \left[sen^2 w\right]^{\frac{n-1}{2}} sen\, w\, dw$$

En el siguiente paso se sustituye el coseno cuadrado en términos de seno o, (en el segundo caso, el cuadrado del seno en términos de coseno,) aplicando la identidad pitagórica correspondiente.

Ejemplo: $\int sen^3 e^x \cos^3 e^x e^x dx$

Solución: Tenemos que la potencia del coseno es impar por lo tanto procedemos a utilizar el método correspondiente.

$$\int sen^3 e^x \left[\cos^2 e^x\right]^{\frac{3-1}{2}} \cos e^x e^x dx$$
$$\int sen^3 e^x \left[1 - sen^2 e^x\right] \cos e^x e^x dx$$
$$\int sen^3 e^x \cos e^x e^x dx - \int sen^5 e^x \cos e^x e^x dx$$

Analizando, que seno sea la función u y procedemos a obtener la diferencial.

$$u = sen\, e^x$$
$$du = \cos e^x e^x dx$$

Sustituimos en la integral y aplicamos las fórmulas correspondientes.

$$\int u^3 du - \int u^5 du$$
$$\frac{u^4}{4} - \frac{u^6}{6} + c$$
$$\frac{1}{2}u^4\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}u^2\right) + c$$
$$\frac{1}{2}sen^4 e^x\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}sen^2 e^x\right) + c$$

Por lo tanto: $\int sen^3 e^x \cos^3 e^x e^x dx = \frac{1}{2}sen^4 e^x\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}sen^2 e^x\right) + c$

Ejercicios:

1. $\int sen^2 \frac{3y}{5} \cos^3 \frac{3y}{5} dy$ R: $\frac{5}{3} sen^3 \frac{3}{5}y\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} sen^2 \frac{3}{5}y\right) + c$.

2. $\int sen^4 3x \cos^3 3x\, dx$ R: $sen^5 3x\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}sen^2 3x\right)+c$.

3. $\int sen^5 \frac{x}{4} \cos^5 \frac{x}{4} dx$ R: $sen^6 \frac{1}{4}x\left(\frac{2}{3}-sen^2\frac{1}{4}x+\frac{2}{5}sen^4\frac{1}{4}x\right)+c$.

4. $\int \frac{\cos^7 x}{sen^4 x} dx$ R: $-\frac{1}{3}\csc^3 x + 3\csc x + 3\, sen\, x - \frac{1}{3} sen\, x + c$

5. $\int \frac{\cos^7 \frac{\theta}{4}}{\sqrt[4]{sen\frac{\theta}{4}}} d\theta$ R: $16\sqrt[4]{sen^3\frac{1}{4}\theta}\left[\frac{1}{3}-\frac{3}{11}sen^2\frac{1}{4}\theta+\frac{3}{19}sen^4\frac{1}{4}\theta-\frac{1}{27}sen^6\frac{1}{4}\theta\right]+c$.

iii) Para m entero impar, la integral se escribirá de la siguiente forma:

$$\int sen^m w \cos^n w\, dw = \int \cos^n w\left[sen^2 w\right]^{\frac{m-1}{2}} sen\, w\, dw$$

En el siguiente paso se sustituye el seno cuadrado a términos de coseno aplicando la identidad pitagórica correspondiente.

Ejemplo: $\int sen^3 e^x \cos^4 e^x e^x dx$

Solución: Tenemos que la potencia del seno es impar por lo tanto procedemos a utilizar el método correspondiente, pero antes conviene elegir $w = e^x$ por lo tanto $dw = e^x dx$. Sustituyendo:

$$\int \cos^4 w\, sen^3 w dw = \int \cos^4 w\left[sen^2 w\right]^{\frac{3-1}{2}} sen\, w\, dw$$
$$\int \cos^4 w\left[1-\cos^2 w\right] sen\, w\, dw$$
$$\int \cos^4 w\, sen\, w\, dw - \int \cos^6 w\, sen\, w\, dw$$

Analizamos que coseno sea la función y procedemos a obtener su diferencial.

$$u = \cos w$$
$$du = -sen\, w\, dw$$
$$-du = sen\, w\, dw$$

Sustituimos en la integral y aplicamos las fórmulas correspondientes y simplificamos la integral.

$$\int u^4(-du) - \int u^6(-du)$$
$$\int u^6 du - \int u^4 du$$
$$\frac{u^7}{7}-\frac{u^5}{5}+c$$
$$\frac{1}{7}\cos^7 w - \frac{1}{5}\cos^5 w + c$$

Por lo tanto: $\int sen^3 e^x \cos^4 e^x e^x dx = \frac{1}{7}\cos^7 e^x - \frac{1}{5}\cos^5 e^x + c$

<u>Nota</u>: En estos dos ejercicios el cual tiene ambas funciones trigonométricas con potencia impar se puede realizar por este procedimiento y el anterior como lo acabamos de hacer, lo importante es identificar las potencias para saber que procedimiento usar.

Ejercicios:

1. $\int \cos^2 \frac{5y}{3} sen^3 \frac{5y}{3} dy$ R: $\frac{1}{5}\cos^3 \frac{5}{3}y\left(\frac{3}{5}\cos^2\frac{5}{3}y-1\right)+c$

2. $\int \cos^4 \frac{x}{3} sen^3 \frac{x}{3} dx$ R: $3\cos^5 \frac{1}{3}x\left(\frac{1}{3}\cos^2\frac{1}{3}x-\frac{1}{5}\right)+c$

3. $\int sen^5 \frac{x}{4} \cos^5 \frac{x}{4} dx$ R: $\cos^6 \frac{1}{4}x\left(\cos^2\frac{1}{4}x-\frac{2}{5}\cos^4\frac{1}{4}x-\frac{2}{3}\right)+c$.

4. $\int \frac{sen^7 x}{\cos^4 x} dx$ R: $\frac{1}{3}\sec^3 x - 3\sec x - 3\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + c$.

5. $\int \sqrt[3]{\cos^2 3x}\, sen^5 3x\, dx$ R: $\cos 3x \sqrt[3]{\cos^2 3x}\left(\frac{2}{11}\cos^2 3x - \frac{1}{17}\cos^4 3x - \frac{1}{5}\right)+c$.

D) *Producto de potencias:* $\int \tan^m w \sec^n w\, dw$, $\int \cot^m w \csc^n w\, dw$.

i) Para n entero par la integral se escribe de la siguiente forma:

$$\int \tan^m w \sec^n w\, dw = \int \tan^m w\left[\sec^2 w\right]^{\frac{n-2}{2}} \sec^2 w\, dw \qquad \int \cot^m w \csc^n w\, dw = \int \cot^m w\left[\csc^2 w\right]^{\frac{n-2}{2}} \csc^2 w\, dw$$

Aplicando las identidades pitagóricas para transformar la secante o cosecante cuadrática (únicamente la que se encuentra entre corchetes) en términos de la tangente o cotangente respectivamente.

Ejemplo: $\int \tan^3 \frac{x}{5} \sec^4 \frac{x}{5} dx$

Solución: Tenemos secante con potencia par por lo tanto procedemos a emplear la estrategia.

$$\int \tan^3 \frac{x}{5}\left[\sec^2 \frac{x}{5}\right]^{\frac{4-2}{2}} \sec^2 \frac{x}{5} dx$$

$$\int \tan^3 \frac{x}{5}\left[\tan^2 \frac{x}{5}+1\right] \sec^2 \frac{x}{5} dx$$

$$\int \tan^5 \frac{x}{5} \sec^2 \frac{x}{5} dx + \int \tan^3 \frac{x}{5} \sec^2 \frac{x}{5} dx$$

Tomamos a la tangente como la función a integrar y obtenemos su diferencial.

$$u = \tan \frac{x}{5}$$

$$du = \frac{1}{5}\sec^2 \frac{x}{5} dx$$

$$5du = \sec^2 \frac{x}{5} dx$$

Sustituyendo en la integral, aplicando las fórmulas correspondientes y simplificando.

$$\int u^5 5du + \int u^3 5du$$

$$5\int u^5 du + 5\int u^3 du$$

$$5\left(\frac{u^6}{6}\right) + 5\left(\frac{u^4}{4}\right) + c$$

$$\frac{5}{2}u^4\left(\frac{1}{3}u^2+\frac{1}{2}\right)+c$$

$$\frac{5}{2}tan^4\frac{1}{5}x\left(\frac{1}{3}tan^2\frac{1}{5}x+\frac{1}{2}\right)+c$$

Por lo tanto: $\int tan^3\frac{x}{5}sec^4\frac{x}{5}dx=\frac{5}{2}tan^4\frac{1}{5}x\left(\frac{1}{3}tan^2\frac{1}{5}x+\frac{1}{2}\right)+c$

Ejercicios:

1. $\int tan^4 3x\, sec^4 3x\, dx$ R: $\frac{1}{105}tan^5 3x\left[7+5tan^2 3x\right]+c$.
2. $\int cot^{-3}x\, csc^6 x\, dx$ R: $\frac{1}{2}tan^2 x-ln\left(cot^2 x\right)-\frac{1}{2}cot^2 x+c$.
3. $\int\frac{sec^8\varepsilon}{\sqrt{tan\,\varepsilon}}d\varepsilon$ R: $2\sqrt{tan\,\varepsilon}\left(1+\frac{3}{5}tan^2\varepsilon+\frac{1}{3}tan^4\varepsilon+\frac{1}{13}tan^6\varepsilon\right)+c$.
4. $\int\sqrt[5]{cot^2 x}\; csc^4 x\, dx$ R: $-5cot\,x\sqrt[5]{cot^2 x}\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{15}cot^2 x\right)+c$.
5. $\int\frac{csc^8 x}{cot^3 x}dx$ R: $\frac{1}{2}tan^2 x-ln\left|cot^3 x\right|-\frac{3}{2}cot^2 x-\frac{1}{4}cot^4 x+c$.

ii) Para m entero impar las integrales se escriben de la siguiente forma:

$$\int tan^m w\, sec^n w\, dw=\int\left[tan^2 w\right]^{\frac{m-1}{2}}sec^{n-1}w\, sec\,w\, tan\,w\, dw$$

$$\int cot^m w\, csc^n w\, dw=\int\left[cot^2 w\right]^{\frac{m-1}{2}}csc^{n-1}w\, csc\,w\, cot\,w\, dw$$

A continuación, utilizamos las identidades pitagóricas para transformar la tangente o la cotangente cuadrática (localizada entre corchetes) en términos de la secante o la cosecante respectivamente.

Ejemplo: $\int cot^3 4\theta\, csc^3 4\theta\, d\theta$

Solución: Tenemos cotangente impar por lo cual aplicaremos la estrategia para separar la función y simplificar.

$$\int\left[cot^2 4\theta\right]^{\frac{3-1}{2}}csc^{3-1}4\theta\, csc\,4\theta\, cot\,4\theta\, d\theta$$

$$\int\left[csc^2 4\theta-1\right]csc^2 4\theta\, csc\,4\theta\, cot\,4\theta\, d\theta$$

$$\int csc^4 4\theta\, csc\,4\theta\, cot\,4\theta\, d\theta-\int csc^2 4\theta\, csc\,4\theta\, cot\,4\theta\, d\theta$$

Tomamos a la cosecante como la función (la que aparece elevada a exponente diferente de la unidad) y obtenemos la diferencial.

$$u=csc\,4\theta$$

$$du=-4csc\,4\theta\, cot\,4\theta\, d\theta$$

$$-\frac{du}{4}=csc\,4\theta\, cot\,4\theta\, d\theta$$

Sustituimos en la integral, aplicamos las fórmulas correspondientes y simplificamos.

$$\int u^4\left(-\frac{du}{4}\right)-\int u^2\left(-\frac{du}{4}\right)$$

$$-\frac{1}{4}\int u^4du+\frac{1}{4}\int u^2du$$

$$\frac{1}{4}\left(\frac{u^3}{3}\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{u^5}{5}\right)+c$$

$$\frac{1}{4}u^3\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}u^2\right)+c$$

$$\frac{1}{4}csc^3 4\theta\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}csc^2 4\theta\right)+c$$

Ejercicios:

1. $\int cot^3\frac{x}{4}csc^3\frac{x}{4}dx$ R: $-4csc^3\frac{1}{4}x\left[\frac{1}{5}csc^2\frac{1}{4}x-\frac{1}{3}\right]+c$.
2. $\int\left(\frac{tan 2x}{sec 2x}\right)^5 dx$ R: $cos 2x\left[\frac{1}{3}cos^2 2x-\frac{1}{10}cos^4 2x-\frac{1}{2}\right]+c$.
3. $\int csc^{\frac{5}{2}} x\, cot^7 x\, dx$ R: $csc^2 x\sqrt{csc\, x}\left(-\frac{1}{17}csc^6 x+\frac{3}{13}csc^4 x-\frac{1}{3}csc^2 x+\frac{1}{5}\right)+c$.
4. $\int\frac{tan^3\theta}{\sqrt[4]{sec^3\theta}}d\theta$ R: $\frac{4}{5}sec\,\theta\sqrt[4]{sec\,\theta}+\frac{4}{3}\sqrt[4]{cos^3\theta}+c$.
5. $\int\frac{cot^5\frac{x}{2}}{csc^7\frac{x}{2}}dx$ R: $2sen^3\frac{1}{2}x\left[1-\frac{2}{5}sen^2\frac{1}{2}x+\frac{3}{7}sen^4\frac{1}{2}x\right]+c$.

iii) Para m entero par y n entero impar las integrales se expresan de la siguiente forma:

$$\int tan^m w\, sec^n w\, dw=\int\left[tan^2 w\right]^{\frac{m}{2}}sec^n w\, dw \qquad \int cot^m w\, csc^n w\, dw=\int\left[cot^2 w\right]^{\frac{m}{2}}csc^n w\, dw$$

Posteriormente se aplican las identidades pitagóricas para transformar la tangente o la cotangente cuadrática en términos de la secante o la cosecante, respectivamente, y después utilizar integración por partes (como en el caso1 inciso *iii)*).

Ejemplo: $\int tan^2\frac{\theta}{2}sec\frac{\theta}{2}d\theta$

Solución: Separamos la integral de acuerdo con la estrategia cuando se tiene tangente con exponente par multiplicada por secante con exponente impar.

$$\int\left[tan^2\frac{\theta}{2}\right]^{\frac{2}{2}}sec\frac{\theta}{2}d\theta$$

$$\int\left[sec^2\frac{\theta}{2}-1\right]sec\frac{\theta}{2}d\theta$$

$$\int sec^3\frac{\theta}{2}d\theta-\int sec\frac{\theta}{2}d\theta$$

Obtenemos en el primer termino una secante impar la cual resolveremos utilizando integración por partes como en el caso 1 inciso iii); entonces tomamos solo la secante cúbica y la integramos.

$$\int sec^3\frac{\theta}{2}d\theta$$

$$\int sec\frac{\theta}{2}sec^2\frac{\theta}{2}d\theta$$

$$u = sec\frac{\theta}{2} \qquad dv = sec^2\frac{\theta}{2}d\theta$$

$$du = \frac{1}{2}sec\frac{\theta}{2}tan\frac{\theta}{2}d\theta \qquad v = 2tan\frac{\theta}{2}$$

Aplicamos la formula de integral por parte sustituimos y simplificamos.

$$\left(sec\frac{\theta}{2}\right)\left(2tan\frac{\theta}{2}\right)-\int\left(2tan\frac{\theta}{2}\right)\left(\frac{1}{2}sec\frac{\theta}{2}tan\frac{\theta}{2}\right)d\theta$$

$$2sec\frac{\theta}{2}tan\frac{\theta}{2}-\int tan^2\frac{\theta}{2}sec\frac{\theta}{2}d\theta$$

$$2sec\frac{\theta}{2}tan\frac{\theta}{2}-\int\left(sec^2\frac{\theta}{2}-1\right)sec\frac{\theta}{2}d\theta$$

$$2sec\frac{\theta}{2}tan\frac{\theta}{2}-\int sec^3\frac{\theta}{2}d\theta+\int sec\frac{\theta}{2}d\theta$$

$$2\int sec^3\frac{\theta}{2}d\theta = 2sec\frac{\theta}{2}tan\frac{\theta}{2}+\int sec\frac{\theta}{2}d\theta$$

$$\int sec^3\frac{\theta}{2}d\theta = sec\frac{\theta}{2}tan\frac{\theta}{2}+\frac{1}{2}\int sec\frac{\theta}{2}d\theta$$

Sustituimos en la integral inicial el resultado de la integral de la secante cubica y simplificamos.

$$sec\frac{\theta}{2}tan\frac{\theta}{2}+\frac{1}{2}\int sec\frac{\theta}{2}d\theta-\int sec\frac{\theta}{2}d\theta$$

$$sec\frac{\theta}{2}tan\frac{\theta}{2}-\frac{1}{2}\int sec\frac{\theta}{2}d\theta$$

Para la integral restante:

$$u = \frac{\theta}{2}$$

$$du = \frac{1}{2}d\theta$$

$$2du = d\theta$$

$$sec\frac{\theta}{2}tan\frac{\theta}{2}-\frac{1}{2}\int(sec\,u)2du$$

$$sec\frac{\theta}{2}tan\frac{\theta}{2}-\int sec\,u\,du$$

$$sec\frac{\theta}{2}tan\frac{\theta}{2}-ln|sec\,u+tan\,u|+c$$

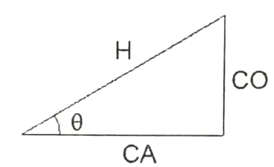
$$sec\frac{\theta}{2}tan\frac{\theta}{2}-ln\left|sec\frac{\theta}{2}+tan\frac{\theta}{2}\right|+c$$

Por lo tanto: $\int tan^2\frac{\theta}{2}sec\frac{\theta}{2}d\theta = sec\frac{\theta}{2}tan\frac{\theta}{2}-ln\left|sec\frac{\theta}{2}+tan\frac{\theta}{2}\right|+c$

SUSTITUCIÓN TRIGONOMETRICA.

La sustitución trigonométrica es un método que cambia las funciones algebraicas del integrando en funciones trigonométricas; este método hace uso del triangulo rectángulo y las razones trigonométricas, apoyado en el Teorema de Pitágoras.

Para asociar este teorema con las funciones trigonométricas nos referiremos a un ángulo agudo del triangulo, específicamente el que está comprendido entre el cateto horizontal y la hipotenusa así ya podemos distinguir a los catetos como opuesto (CO) y adyacente (CA).



Del teorema tenemos que: $(CA)^2 + (CO)^2 = H^2$

Para trabajar en integral haremos razones entre la constante y a la variable de la forma que ocupemos las funciones trigonométricas que tengan diferenciales positivas (seno, tangente y secante); de este modo la variable (u) se ubicará como) el cateto opuesto y la constante como el cateto adyacente (a).

$$u = CO, \qquad a = CA$$

Por lo tanto: $a^2 + u^2 = H^2$

Despejando cada literal tres posibilidades.

$H = \sqrt{a^2 + u^2}$ ó $H = \sqrt{u^2 + a^2}$ $\qquad a = \sqrt{H^2 - u^2}$ $\qquad u = \sqrt{H^2 - a^2}$

Observamos que en cada caso la hipotenusa siempre es positiva, este es un dato que tomaremos en cuenta al momento de utilizar el método de sustitución trigonométrica.

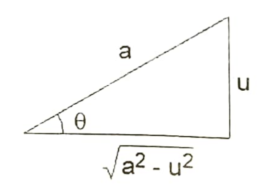
El método de sustitución trigonométrica se emplea para integrales que tienen raíces cuadradas de la forma) $\left(\sqrt{a^2 + u^2} = \sqrt{u^2 + a^2}, \sqrt{u^2 - a^2}, \sqrt{a^2 - u^2}\right)$; también será empleado cuando estas sumas o diferencias de cuadrados están elevadas a un exponente entero $\left((a^2 + u^2)^n = (u^2 + a^2)^n, (u^2 - a^2)^n, (a^2 - u^2)^n\right)$.

La construcción del triángulo rectángulo en este proceso se explicará a continuación.

A) Integrales que contienen la forma $\sqrt{a^2 - u^2}$.

Como se explico con anterioridad lo importante es ver quien es positivo en el radical para encontrar a la hipotenusa; por lo tanto la constante es la hipotenusa y sabemos que la función es el cateto opuesto y lo colocamos en el triangulo rectángulo y el lado que falta será el radical.

$$a = H$$
$$u = CO$$
$$\sqrt{a^2 - u^2} = CA$$

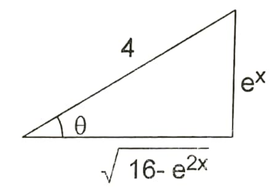


Ejemplo: $\int \frac{\sqrt{16-e^{2x}}}{e^x}dx$

Solución: En este ejercicio tenemos una diferencia de cuadrados donde la constante es positiva en el interior del radical.

$$\int \frac{\sqrt{4^2-\left(e^x\right)^2}}{e^x}dx$$

Por lo tanto, construiremos el triangulo para emplear el proceso de sustitución trigonométrica, donde la hipotenusa es 4, el cateto opuesto es la función e^x y el cateto adyacente es el radical $\sqrt{16-e^{2x}}$.



Las razones trigonométricas a utilizar son:

$$sen\,\theta=\frac{CO}{H}=\frac{e^x}{4} \qquad cos\,\theta=\frac{CA}{H}=\frac{\sqrt{16-e^{2x}}}{4}$$

De la (primera) razón despejamos a la variable x, y de la otra sólo despejamos al radical.

$$\frac{e^x}{4}=sen\,\theta \qquad \frac{\sqrt{16-e^{2x}}}{4}=cos\,\theta$$

$$e^x=4\,sen\,\theta \qquad \sqrt{16-e^{2x}}=4\,cos\,\theta$$

$$x=ln\left(4\,sen\,\theta\right)$$

Una vez despejada la variable x, obtenemos la diferencial para sustituir los elementos en la integral.

$$x=ln\left(4\,sen\,\theta\right)$$

$$dx=\frac{1}{4\,sen\,\theta}\left(4\,cos\,\theta\right)d\theta$$

$$dx=cot\,\theta\,d\theta$$

Sustituimos los datos en la integral y simplificamos empleando identidades trigonométricas.

$$\int \frac{4\,cos\,\theta}{4\,sen\,\theta}cot\,\theta\,d\theta$$

$$\int cot\,\theta\,cot\,\theta\,d\theta$$

$$\int cot^2\,\theta\,d\theta$$

Como observamos, podemos utilizar identidades o el método de potencias trigonométricas, lo importante que hay que resaltar es que se puede utilizar una estrategia aprendida anteriormente o un método para concluir la integral.

$$\int (csc^2 \theta - 1)\, d\theta$$
$$\int csc^2 \theta \, d\theta - \int d\theta$$
$$-\cot \theta - \theta + c$$

Ya que sea obtenido la integral se procede a regresar a la variable inicial de la integral por lo cual buscaremos de acuerdo a sus definiciones de las funciones trigonométricas obtenidas, en el triangulo que hicimos al inicio del ejercicio.

El valor de θ lo obtenemos de la primera razón:

$$\cot \theta = \frac{CA}{CO} = \frac{\sqrt{16-e^{2x}}}{e^x}$$

$$sen\,\theta = \frac{e^x}{4}$$
$$\theta = arc\,sen\frac{e^x}{4}$$

Sustituimos en la integral.

$$-\frac{\sqrt{16-e^{2x}}}{e^x} - arc\,sen\frac{1}{4}e^x + c$$

Por lo tanto: $\int \frac{\sqrt{16-e^{2x}}}{e^x}dx = -\frac{\sqrt{16-e^{2x}}}{e^x} - arc\,sen\frac{1}{4}e^x + c$

Ejercicios:

1. $\int \frac{sec^2 x}{(4-tan^2 x)^{\frac{3}{2}}}dx$ R: $\frac{tan\,x}{4\sqrt{4-tan^2 x}} + c$.
2. $\int \frac{1}{y^2\sqrt{a^2-y^2}}dy$ R: $-\frac{\sqrt{a^2-y^2}}{a^2 y} + c$.
3. $\int \frac{\sqrt{9-4r^2}}{r}dr$ R: $ln\left|\frac{3-\sqrt{9-4r^2}}{2r}\right|^3 + \sqrt{9-4r^2} + c$.
4. $\int \frac{h^2}{\sqrt{(3-h^2)^3}}dh$ R: $\frac{h}{\sqrt{3-h^2}} - arc\,sen\frac{\sqrt{3}}{3}h + c$.
5. $\int e^t\sqrt{25-e^{2t}}\,dt$ R: $\frac{25}{2}arc\,sen\frac{e^t}{5} + \frac{1}{2}e^t\sqrt{25-e^{2t}} + c$.
6. $\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx$ R: $2arc\,sen\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2} + c$.
7. $\int \frac{x^3}{\sqrt{2-x^2}}dx$ R: $\frac{1}{3}(x^2+4)\sqrt{2-x^2} + c$.
8. $\int \frac{\sqrt{a^2-b^2t^2}}{t^2}dt$ R: $-\frac{\sqrt{a^2-b^2t^2}}{t} - b\,arc\,sen\frac{b}{a}t + c$.
9. $\int (16-x^2)^{-\frac{5}{2}}dx$ R: $\frac{x(24-x^2)}{374(16-x^2)\sqrt{16-x^2}} + c$.
10. $\int y^3(a^2-y^2)^{\frac{3}{2}}dy$ R: $-\frac{1}{35}(a^2-y^2)(2a^2+5y^2)\sqrt{a^2-y^2} + c$.

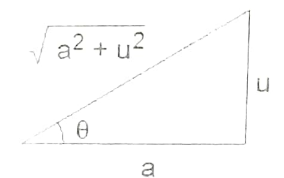
11. $\int t^2\sqrt{9-t^2}\,dt$ R: $\frac{81}{8}\,arc\,sen\frac{t}{3}-\frac{1}{8}t\left(9-2t^2\right)\sqrt{9-t^2}+c$.

12. $\int \frac{x^3}{\left(1-x^2\right)^2}dx$ R: $\frac{x^2}{2\left(1-x^2\right)}+ln\sqrt{\left|1-x^2\right|}+c$.

B) Integrales que contienen la forma $\sqrt{a^2+u^2}$.

Observamos que los elementos están en una suma de cuadrados por lo tanto al ser ambos positivos el radical se toma como la hipotenusa, la variable el cateto opuesto y la constante el cateto adyacente.

$$\sqrt{a^2+u^2}=H$$
$$u=CO$$
$$a=CA$$

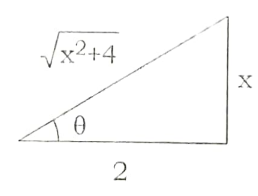


Ejemplo: $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+4}}dx$

Solución: Tenemos una suma de cuadrados en el interior del radical, que reescribiremos de la siguiente forma:

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+2^2}}dx$$

Construimos el triangulo rectángulo, la hipotenusa es el radical $\sqrt{x^2+4}$, el cateto opuesto es x, y el cateto adyacente 2.



Las razones trigonométricas que corresponden son:

$$tan\,\theta=\frac{CO}{CA}=\frac{x}{2} \qquad sec\,\theta=\frac{H}{CA}=\frac{\sqrt{x^2+4}}{2}$$

De la razón tangente despejamos a x y obtenemos su diferencial, y de la razón secante despejamos el radical.

$$\frac{x}{2}=tan\,\theta$$
$$x=2\,tan\,\theta$$
$$dx=2\,sec^2\,\theta\,d\theta$$

$$\frac{\sqrt{x^2+4}}{2}=sec\,\theta$$
$$\sqrt{x^2+4}=2\,sec\,\theta$$

Sustituimos en la integral y simplificamos.

$$\int \frac{\left(2\,tan\,\theta\right)^3}{2\,sec\,\theta}2\,sec^2\,\theta\,d\theta$$
$$8\int tan^3\,\theta\,sec\,\theta\,d\theta$$

Esta integral se resolverá de dos formas, en una aplicamos el método de potencias trigonométricas; en otra aplicamos identidades trigonométricas, dejando todo en términos de seno y coseno, y simplificamos.

$$8\int\left[\tan^2\theta\right]^{\frac{3-1}{2}}\tan\theta\sec\theta\,d\theta$$

$$8\int\left[\sec^2\theta-1\right]\tan\theta\sec\theta\,d\theta$$

$$8\int\sec^2\theta\tan\theta\sec\theta\,d\theta-8\int\tan\theta\sec\theta\,d\theta$$

Tomamos a la secante como la función y obtenemos su diferencial.

$$u=\sec\theta$$
$$du=\sec\theta\tan\theta\,d\theta$$

Sustituimos en la integral, aplicamos las fórmulas correspondientes y simplificamos.

$$8\int u^2du-8\int du$$

$$8\left(\frac{u^3}{3}\right)-8u+c$$

$$8u\left(\frac{1}{3}u^2-1\right)+c$$

$$8\sec\theta\left(\frac{1}{3}\sec^2\theta-1\right)+c$$

$$8\int\frac{sen^3\theta}{\cos^3\theta}\frac{1}{\cos\theta}d\theta$$

$$8\int\frac{sen^3\theta}{\cos^4\theta}d\theta$$

$$8\int\cos^{-4}\theta\,sen^3\theta\,d\theta$$

Aplicamos potencias trigonométricas.

$$8\int\cos^{-4}\theta\left[sen^2\theta\right]^{\frac{3-1}{2}}sen\,\theta\,d\theta$$

$$8\int\cos^{-4}\theta\left[1-\cos^2\theta\right]sen\,\theta\,d\theta$$

$$8\int\cos^{-4}\theta\,sen\,\theta\,d\theta-8\int\cos^{-2}\theta\,sen\,\theta\,d\theta$$

Tomamos a coseno como la función y obtenemos el diferencial.

$$u=\cos\theta$$
$$du=-sen\,\theta\,d\theta$$
$$-du=sen\,\theta\,d\theta$$

Sustituimos en la integral, aplicamos las fórmulas correspondientes y simplificamos.

$$8\int u^{-4}(-du)-8\int u^{-2}(-du)$$

$$-8\int u^{-4}du+8\int u^{-2}du$$

$$8\int u^{-2}du-8\int u^{-4}du$$

$$-8\left(\frac{u^{-3}}{-3}\right)+8\left(\frac{u^{-1}}{-1}\right)+c$$

$$\frac{8}{3}\left(\frac{1}{u^3}\right)-8\left(\frac{1}{u}\right)+c$$

$$\frac{8}{3}\left(\frac{1}{\cos^3\theta}\right)-8\left(\frac{1}{\cos\theta}\right)+c$$

$$\frac{8}{3}\sec^3\theta-8\sec\theta+c$$

$$8\sec\theta\left(\frac{1}{3}\sec^2\theta-1\right)+c$$

Como observamos, el resultado es igual sin importar el camino que se tome, siempre y cuando apliquemos los conocimientos correctamente, ahora sustituimos los valores en el resultado para obtener la integral en términos de la variable inicial y simplificamos.

$$8\left(\frac{\sqrt{x^2+4}}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{x^2+4}}{2}\right)^2-1\right)+c$$

$$4\sqrt{x^2+4}\left(\frac{1}{3}\left(\frac{x^2+4}{4}\right)-1\right)+c$$

$$4\sqrt{x^2+4}\left(\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}-1\right)+c$$

$$4\sqrt{x^2+4}\left(\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}-1\right)+c$$

$$4\sqrt{x^2+4}\left(\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}\right)+c$$

$$\frac{4}{3}\left(x^2-2\right)\sqrt{x^2+4}+c$$

Por lo tanto: $\int\frac{x^3}{\sqrt{x^2+4}}dx=\frac{4}{3}\left(x^2-2\right)\sqrt{x^2+4}+c$

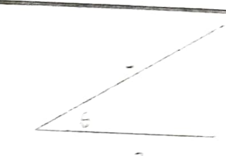
Ejercicios:

1. $\int\frac{dr}{\left(a^2+r^2\right)^{\frac{3}{2}}}$ R: $\frac{r}{a^2\sqrt{a^2+r^2}}+c$.
2. $\int\frac{1}{x\sqrt{4+9x^2}}dx$ R: $ln\left|\frac{\sqrt{4+9x^2}-2}{3x}\right|+c$.
3. $\int\frac{h^2}{\left(\sqrt{h^2+a^2}\right)^3}dh$ R: $ln\left|\frac{\sqrt{h^2+a^2}+h}{a}\right|-\frac{h}{\sqrt{h^2+a^2}}+c$.
4. $\int\frac{x^2}{\sqrt{\left(x^2+1\right)^5}}dx$ R: $\frac{x^3}{3\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}+c$.
5. $\int\frac{x^3\,dx}{\left(1+x^2\right)^2}$ R: $ln\sqrt{\left|1+x^2\right|}-\frac{x^2}{2\left(1+x^2\right)}+c$.
6. $\int x^3\sqrt{x^2+9}\,dx$ R: $\frac{1}{5}\left(x^2+9\right)\left(x^2-6\right)\sqrt{x^2+9}+c$.
7. $\int_0^{2\sqrt{3}}\frac{x^3}{\sqrt{x^2+4}}dx$ R: $\frac{32}{3}$.
8. $\int\frac{1}{x^4\sqrt{x^2+3}}dx$ R: $\frac{\left(2x^2-3\right)\sqrt{x^2+3}}{27x^3}+c$.
9. $\int\frac{\sqrt{h^2+a^2}}{h^2}dh$ R: $ln\left|\frac{h+\sqrt{h^2+a^2}}{a}\right|-\frac{\sqrt{h^2+a^2}}{h}+c$.
10. $\int\frac{1}{y^2\left(y^2+2\right)^{\frac{3}{2}}}dy$ R: $-\frac{y^2+1}{2y\sqrt{y^2+2}}+c$.
11. $\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx$ R: $\frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{2a^2}+ln\sqrt{\left|\frac{\sqrt{x^2+a^2}+x}{a}\right|}+c$.
12. $\int x^2\sqrt{x^2+1}\,dx$ R: $\frac{1}{8}x\left(x^2-1\right)\sqrt{x^2+1}-ln\sqrt[8]{\left|\sqrt{x^2+1}+x\right|}+c$

C) Integrales que contienen la forma $\sqrt{u^2-a^2}$

En este caso tenemos que la función es la positiva, por lo tanto ésta se ubica en la hipotenusa, la constante en el cateto adyacente, y el radical en el cateto opuesto.

$$u = H$$
$$\sqrt{a^2 - u^2} = CO$$
$$a = CA$$

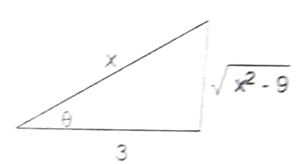


Ejemplo: $\int \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x^2} dx$

Solución: En la integral tenemos una diferencia de cuadrados donde la variable cuadr interior del radical, por lo tanto reescribiremos la integral de la siguiente forma.

$$\int \frac{\sqrt{x^2 - 3^2}}{x^2} dx$$

Construimos el triangulo rectángulo donde la hipotenusa será la variable x, el cateto opues el cateto adyacente 3.



Las razones trigonométricas a utilizar son:

$$\sec\theta = \frac{H}{CA} = \frac{x}{3} \qquad \tan\theta = \frac{CO}{CA} = \frac{\sqrt{x^2 -}}{3}$$

De la razón secante despejamos a la variable x y obtenemos su diferencial, y de la razón tang radical.

$$\frac{x}{3} = \sec\theta$$
$$x = 3\sec\theta$$
$$dx = 3\sec\theta\tan\theta\, d\theta$$

$$\frac{\sqrt{x^2 - 9}}{3} = \tan\theta$$
$$\sqrt{x^2 - 9} = 3\tan\theta$$

Sustituimos en la integral y simplificamos.

$$\int \frac{3\tan\theta}{(3\sec\theta)^2} 3\sec\theta\tan\theta\, d\theta$$
$$\int \frac{9\sec\theta\tan^2\theta}{9\sec^2\theta} d\theta$$
$$\int \frac{\tan^2\theta}{\sec\theta} d\theta$$

Aplicamos identidades trigonométricas para transformar la integral.

$$\int \frac{\sec^2\theta - 1}{\sec\theta} d\theta$$
$$\int \left(\frac{\sec^2\theta}{\sec\theta} - \frac{1}{\sec\theta}\right) d\theta$$
$$\int (\sec\theta - \cos\theta)\, d\theta$$

$$\int \sec\theta \, d\theta - \int \cos\theta \, d\theta$$

Aplicamos las fórmulas correspondientes para integrar y simplificamos.

$$\ln|\sec\theta + \tan\theta| - \operatorname{sen}\theta + c$$

Sustituimos los valores correspondientes:

$$\ln\left|\frac{x}{3} + \frac{\sqrt{x^2-9}}{3}\right| - \frac{\sqrt{x^2-9}}{x} + c$$

$$\ln\left|\frac{x + \sqrt{x^2-9}}{3}\right| - \frac{\sqrt{x^2-9}}{x} + c$$

Por lo tanto: $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^2}dx = \ln\left|\frac{x + \sqrt{x^2-9}}{3}\right| - \frac{\sqrt{x^2-9}}{x} + c$

Ejercicios.

1. $\int \frac{1}{t^2\sqrt{t^2-a^2}}dt$ R: $\frac{\sqrt{t^2-a^2}}{a^2t} + c$
2. $\int \frac{1}{\sqrt{h^2-a^2}}dh$ R: $\ln\left|\frac{h+\sqrt{h^2-a^2}}{a}\right| + c$
3. $\int \frac{dt}{e^t\sqrt{e^{2t}-9}}$ R: $\frac{\sqrt{e^{2t}-9}}{9e^t} + c$
4. $\int \frac{\sqrt{y^2-b^2}}{y}dy$ R: $\sqrt{y^2-b^2} - b\operatorname{arc\,sec}\frac{y}{b} + c$
5. $\int \frac{r^3}{(r^2-1)^2}dr$ R: $\ln\sqrt{|r^2-1|} - \frac{1}{2(r^2-1)} + c$
6. $\int (x^2-1)^{-\frac{3}{2}}dx$ R: $-\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} + c$
7. $\int \frac{\ln^3 w}{w\sqrt{\ln^2 w-4}}dw$ R: $\frac{1}{3}(\ln^2 w-8)\sqrt{\ln^2 w-4} + c$
8. $\int \frac{1}{y^4(y^2-1)^{\frac{3}{2}}}dy$ R: $\frac{8y^4-12y^2+3}{3y(y^2-1)\sqrt{y^2-1}} + c$
9. $\int r^3\sqrt{a^2r^2-b^2}\,dr$ R: $\frac{1}{15a^4}(a^2r^2-b^2)(3a^2r^2-2b^2)\sqrt{a^2r^2-b^2} + c$
10. $\int \frac{x^2}{\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)^3}dx$ R: $\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right| - \frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}} + c$
11. $\int \sqrt{h^2-a^2}\,dh$ R: $\frac{1}{2}h\sqrt{h^2-a^2} - a^2\ln\sqrt{\left|\frac{h+\sqrt{h^2-a^2}}{a}\right|} + c$
12. $\int x^2\sqrt{x^2-1}\,dx$ R: $\frac{1}{8}x(2x^2-1)\sqrt{x^2-1} - \ln\sqrt[8]{\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|} + c$

D) Miscelánea

1. $\int \frac{x^2}{\sqrt{21+4x-x^2}}dx$ R: $\frac{33}{2}arc\,sen\frac{x-2}{5}-\frac{1}{2}(x-2)\sqrt{21+4x-x^2}-4\sqrt{21+4x-x^2}+c$.

2. $\int \frac{x^3}{(25-x^2)^2}dx$ R: $\frac{x^2}{2(25-x^2)}+ln\left|\frac{\sqrt{25-x^2}}{5}\right|+c$.

3. $\int \frac{1}{(5-4x-x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$ R: $\frac{x+2}{9\sqrt{5-4x-x^2}}+c$.

4. $\int \frac{1}{(z^2-6z+18)^{\frac{3}{2}}}dz$ R: $\frac{z-3}{9\sqrt{z^2-6z+18}}+c$.

5. $\int \frac{e^w}{(7+4e^w+e^{2w})^{\frac{5}{2}}}dw$ R: $\frac{(e^w+2)(2e^{2w}+8e^w+17)}{27(e^{2w}+4e^w+7)\sqrt{7+4e^w+e^{2w}}}+c$.

6. $\int \frac{1}{(x+1)^2\sqrt{x^2+2x+2}}dx$ R: $-\frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x+1}+c$.

7. $\int \frac{1}{\sqrt{9x^2+12x+8}}dx$ R: $ln\sqrt[3]{\left|\frac{3x+2+\sqrt{9x^2+12x+8}}{2}\right|}+c$.

8. $\int \frac{6-x}{\sqrt{4x^2-12x+5}}dx$ R: $ln\sqrt[4]{\left|\frac{2x+3\sqrt{4x^2-12x+5}}{2}\right|^9}-\frac{1}{4}\sqrt{4x^2-12x+5}+c$.

9. $\int \frac{1}{(x^2+a^2)^2}dx$ R: $\frac{1}{2a^3}\left[arc\tan\frac{x}{a}+\frac{ax}{a^2+x^2}\right]+c$.

10. $\int \frac{1}{x(a^2-x^2)^2}dx$ R: $\frac{1}{2a^2(a^2-x^2)}+\frac{1}{a^4}ln\left|\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\right|+c$

$\frac{x^2}{2a^4(a^2-x^2)}+\frac{1}{a^4}ln\left|\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\right|+c$.

11. $\int \frac{1}{(6x-x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$ R: $\frac{x-3}{9\sqrt{6x-x^2}}+c$.

12. $\int \frac{1}{x\sqrt{6x-x^2}}dx$ R: $\frac{x-6}{3\sqrt{6x-x^2}}+c$.

13. $\int \sqrt{2-6x-9x^2}dx$ R: $\frac{1}{2}arc\,sen\frac{\sqrt{3}(3x+1)}{3}+\frac{1}{6}(3x+1)\sqrt{2-9x^2-6x}+c$.

14. $\int \frac{x^3}{\sqrt{2x-x^2}}dx$ R: $\frac{5}{2}arc\,sen(x-1)-\frac{1}{6}(2x^2+5x+15)\sqrt{2x-x^2}+c$.

15. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-4x+13}}dx$ R: $ln\left|\frac{\sqrt{x^2-4x+13}+x-2}{3}\right|+c$.

16. $\int \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}dx$ R: $\frac{1}{2}arc\,sen(x-1)+\frac{1}{2}(x-1)\sqrt{2x-x^2}+c$

FRACCIONES PARCIALES

Este método se emplea para integrar funciones racionales que no se simplifican en inmediatas por los artificios o métodos anteriormente utilizados. Para emplear este método se debe tener una función racional propia, es decir, que el grado del numerador sea menor que el grado del denominador, si es impropia (el numerador tiene un grado mayor que el denominador) deberá efectuarse la división correspondiente.

Se tienen cuatros casos, la clasificación depende de la factorización que se tenga en el denominador de la integral, primero se determinará si son factores, lineales o cuadráticos, irreducibles y, posteriormente, si estos factores no se repiten, o se repiten.

- Caso I: Factores lineales irreducibles que no se repiten.
- Caso II: Factores lineales irreducibles que se repiten.
- Caso III: Factores cuadráticos irreducibles que no se repiten.
- Caso IV: Factores cuadráticos irreducibles que se repiten.

Para la comprensión del tema es necesario recordar las factorizaciones, simplificación de fracciones algebraicas y la resolución de sistemas de ecuaciones lineales de primer grado.

A) Caso I. Factores lineales irreducibles que no se repiten.
Dependiendo del número de factores que contenga el denominador, será el número de fracciones parciales en que se descompondrá el integrando de la siguiente forma:

$$\frac{A}{ax+b}+\frac{B}{cx+d}+\frac{C}{ex+f}+\ldots$$

Ejemplo: $\int \frac{x+1}{x^3+x^2-6x}dx$

Solución: Procedemos a factorizar el denominador.

$$x^3+x^2-6x$$
$$x\left(x^2+x-6\right)$$
$$x(x+3)(x-2)$$

Sustituimos en la integral.

$$\int \frac{x+1}{x(x+3)(x-2)}dx$$

Tomamos el integrando y la igualamos con la suma de fracciones parciales correspondientes con cada uno de los factores del denominador.

$$\frac{x+1}{x(x+3)(x-2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+3}+\frac{C}{x-2}$$

Multiplicamos ambos miembros por el común denominador:

$$x(x+3)(x-2)\left[\frac{x+1}{x(x+3)(x-2)}\right]=\left[\frac{A}{x}+\frac{B}{x+3}+\frac{C}{x-2}\right]x(x+3)(x-2)$$
$$x+1=A(x+3)(x-2)+Bx(x-2)+Cx(x+3)$$

Realizamos las multiplicaciones.

$$x+1=A\left(x^2+x-6\right)+B\left(x^2-2x\right)+C\left(x^2+3x\right)$$
$$x+1=Ax^2+Ax-6A+Bx^2-2Bx+Cx^2+3Cx$$

Factorizamos los términos comunes de la variable que estamos integrando, en forma decreciente en el grado.

$$x+1=x^2\left(A+B+C\right)+x\left(A-2B+3C\right)+\left(-6A\right)$$

Igualamos los términos del polinomio de la izquierda con los de la derecha, por lo tanto:

$$0=x^2\left(A+B+C\right) \qquad x=x\left(A-2B+3C\right) \qquad 1=-6A$$

Formamos ecuaciones lineales con incógnitas A, B y C:

$$A+B+C=0 \qquad A-2B+3C=1 \qquad A=-\frac{1}{6}$$

Observamos que el valor de A ya se tiene, por lo tanto se sustituye en las otras dos ecuaciones.

$$-\frac{1}{6}+B+C=0 \qquad -\frac{1}{6}-2B+3C=1$$
$$B+C=\frac{1}{6} \qquad -2B+3C=\frac{7}{6}$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones simultáneas para obtener los valores de B y C:

$$B+C=\frac{1}{6} \qquad -2B+3C=\frac{7}{6}$$
$$1)\ 6B+6C=1 \qquad 2)\ -12B+18C=7$$

A la ecuación (1) la multiplicamos por 2 y sumamos miembro a miembro las dos ecuaciones (método de reducción por suma)

$$\begin{array}{r} 12B+12C=2 \\ -12B+18C=7 \\ \hline 0+30C=9 \end{array}$$
$$30C=9$$
$$C=\frac{3}{10}$$

Sustituimos el valor de C en la ecuación 1 y obtenemos el valor de B.

$$6B+6\left(\frac{3}{10}\right)=1$$
$$6B+\frac{9}{5}=1$$
$$6B=-\frac{4}{5}$$
$$B=-\frac{4}{30}$$

$$B=-\frac{2}{15}$$

Sustituyendo los valores de A, B y C en las fracciones parciales.

$$\frac{x+1}{x(x+3)(x-2)}=\frac{-\frac{1}{6}}{x}+\frac{-\frac{1}{15}}{x+3}+\frac{\frac{3}{10}}{x-2}$$

Sustituimos las fracciones parciales por el integrando en la integral.

$$\int\left(\frac{-\frac{1}{6}}{x}+\frac{-\frac{1}{15}}{x+3}+\frac{\frac{3}{10}}{x-2}\right)dx$$

$$\frac{3}{10}\int\frac{1}{x-2}dx-\frac{1}{6}\int\frac{1}{x}dx-\frac{1}{15}\int\frac{1}{x+3}dx$$

$u=x-2$
$du=dx$

$v=x+3$
$dv=dx$

Sustituyendo en la integral, aplicamos las fórmulas correspondientes y simplificamos.

$$\frac{3}{10}\int\frac{1}{u}du-\frac{1}{6}\int\frac{1}{x}dx-\frac{1}{15}\int\frac{1}{v}dv$$

$$\frac{3}{10}ln|u|-\frac{1}{6}ln|x|-\frac{1}{15}ln|v|+c$$

$$ln|x-2|^{\frac{3}{10}}-\left(\frac{1}{6}ln|x|+\frac{1}{15}ln|x+3|\right)+c$$

$$ln\sqrt[10]{|x-2|^3}-\left(ln|x|^{\frac{1}{6}}+ln|x+3|^{\frac{1}{15}}\right)+c$$

$$ln\sqrt[10]{|x-2|^3}-ln\left[\sqrt[6]{|x|}\sqrt[13]{|x+3|}\right]+c$$

$$ln\frac{\sqrt[10]{|x-2|^3}}{\sqrt[6]{|x|}\sqrt[13]{|x+3|}}+c$$

Por lo tanto: $\int\frac{x+1}{x^3+x^2-6x}dx=ln\frac{\sqrt[10]{|x-2|^3}}{\sqrt[6]{|x|}\sqrt[13]{|x+3|}}+c$

Ejercicios:

1. $\int\frac{3x^2-5x-4}{x^3-x}dx$ R: $ln\frac{x^4(x+1)^2}{|x-1|^3}+c$.

2. $\int\frac{7x+1}{x^2+2x-3}dx$ R: $ln\left|(x+3)^5(x-2)^2\right|+c$.

3. $\int\frac{4x-2}{x^3-x^2-2x}dx$ R: $ln\frac{|x(x-2)|}{(x+1)^2}+c$.

4. $\int \frac{4x-11}{2x^2+7x-4}dx$ R: $ln\frac{|4+x|^3}{|2x-1|}+c.$

5. $\int \frac{2x+5}{6x^2+7x-3}dx$ R: $ln\frac{\sqrt[33]{|3x-1|^{17}}}{\sqrt[11]{(2x+3)^2}}+c.$

6. $\int \frac{x^2}{x^2+x-6}dx$ R: $x+ln\sqrt[5]{\frac{(x-2)^4}{|x+3|^9}}+c.$

7. $\int \frac{x^2+x+2}{x^2-1}dx$ R: $x+ln\frac{(x-1)^2}{|x+1|}+c$

8. $\int \frac{x^5+3x^4-x^3-4x^2+3x+4}{x^3+x^2-2x}dx$ R: $\frac{1}{3}x^3+x^2-x+ln\frac{|x+2|(x-1)^2}{x^2}+c.$

9. $\int \frac{4y^2-3y-30}{y^3+3y^2-4y-12}dy$ R: $ln\frac{|y+3|^3(y+2)^2}{|y-2|}+c.$

10. $\int \frac{14-11r-r^2}{r^3-14r-r^2+24}dr$ R: $ln\frac{|r+4|(r-2)^2}{(r-3)^4}+c.$

B) Caso II. Factores lineales irreducibles que se repiten.

En este caso se tendrá un factor lineal elevado a un exponente, el cual es igual al número de veces que se repite, este exponente indicará el número de fracciones parciales en que se descompondrá el integrando:

$$\frac{A}{ax+b}+\frac{B}{(ax+b)^2}+\frac{C}{(ax+b)^3}+\ldots+\frac{Z}{(ax+b)^n}$$

Ejemplo: $\int \frac{x+1}{x^5-4x^4+4x^3}dx$

Solución: Factorizamos el denominador.

$$x^5-4x^4+4x^3$$
$$x^3(x^2-4x+4)$$
$$x^3(x-2)^2$$

Sustituimos en la integral.

$$\int \frac{x+1}{x^3(x-2)^2}dx$$

Tomamos el integrando y lo igualamos al número de fracciones parciales que nos indica la suma de los exponentes del denominadores; tomando en cuenta que empiezan desde el exponente lineal hasta el exponente que indica cada factor.

$$\frac{x+1}{x^3(x-2)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x^3}+\frac{D}{x-2}+\frac{E}{(x-2)^2}$$

Multiplicamos ambos miembros de la igualdad por el común denominador y simplificamos.

$$x^3(x-2)^2\left[\frac{x+1}{x^3(x-2)^2}\right]=\left[\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x^3}+\frac{D}{x-2}+\frac{E}{(x-2)^2}\right]x^3(x-2)^2$$

$$x+1=Ax^2(x-2)^2+Bx(x-2)^2+C(x-2)^2+Dx^3(x-2)+Ex^3$$

$$x+1=A\left(x^4-4x^3+4x^2\right)+B\left(x^3-4x^2+4x\right)+C\left(x^2-4x+4\right)+D\left(x^4-2x^3\right)+Ex^3$$

$$x+1=Ax^4-4Ax^3+4Ax^2+Bx^3-4Bx^2+4Bx+Cx^2-4Cx+4C+Dx^4-2Dx^3+Ex^3$$

Factorizamos los factores comunes de la variable de integración para formar un polinomio.

$$x+1=x^4(A+D)+x^3(-4A+B-2D+E)+x^2(4A-4B+C)+x(4B-4C)+(4C)$$

Igualamos los términos del polinomio de la izquierda con los de la derecha:

$$0=x^4(A+D)\qquad 0=x^3(-4A+B-2D+E)\qquad 0=x^2(4A-4B+C)\qquad x=x(4B-4C)\qquad 1=4C$$

Despejamos para formar ecuaciones con A, B y C como incógnitas:

$$A+D=0\qquad -4A+B-2D+E=0\qquad 4A-4B+C=0\qquad 4B-4C=1\qquad C=\frac{1}{4}$$

Observando que el valor de C ya se obtuvo, lo sustituiremos en las demás ecuaciones para calcular los valores que faltan.

$$A+D=0$$
$$\frac{7}{16}+D=0$$
$$D=-\frac{7}{16}$$

$$-4A+B-2D+E=0$$
$$-4\left(\frac{7}{16}\right)+\frac{1}{2}-2\left(-\frac{7}{16}\right)+E=0$$
$$-\frac{7}{4}+\frac{1}{2}+\frac{7}{8}+E=0$$
$$-\frac{3}{8}+E=0$$
$$E=\frac{3}{8}$$

$$4A-4\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}=0$$
$$4A-2+\frac{1}{4}=0$$
$$4A-\frac{7}{4}=0$$
$$4A=\frac{7}{4}$$
$$A=\frac{7}{16}$$

$$4B-4\left(\frac{1}{4}\right)=1$$
$$4B-1=1$$
$$4B=2$$
$$B=\frac{2}{4}$$
$$B=\frac{1}{2}$$

$$C=\frac{1}{4}$$

Sustituyendo Los valores de A, B, C, D y E en las fracciones parciales.

$$\frac{x+1}{x^3(x-2)^2}=\frac{\frac{7}{16}}{x}+\frac{\frac{1}{2}}{x^2}+\frac{\frac{1}{4}}{x^3}+\frac{-\frac{7}{16}}{x-2}+\frac{\frac{3}{8}}{(x-2)^2}$$

Sustituimos el integrando por la suma de las fracciones parciales:

$$\int\left(\frac{\frac{7}{16}}{x}+\frac{\frac{1}{2}}{x^2}+\frac{\frac{1}{4}}{x^3}+\frac{-\frac{7}{16}}{x-2}+\frac{\frac{3}{8}}{(x-2)^2}\right)dx$$

Aplicamos las formulas correspondientes para separar cada una de las integrales.

$$\frac{7}{16}\int\frac{1}{x}dx+\frac{1}{2}\int x^{-2}dx+\frac{1}{4}\int x^{-3}dx-\frac{7}{16}\int\frac{1}{x-2}dx+\frac{3}{8}\int(x-2)^{-2}dx$$

Analizamos el quinto y sexto término de la integral para verificar que esté completo tomando como la función a:

$$u=x-2$$
$$du=dx$$

Sustituimos, aplicamos las fórmulas correspondientes y simplificamos.

$$\frac{7}{16}\int\frac{1}{x}dx+\frac{1}{2}\int x^{-2}dx+\frac{1}{4}\int x^{-3}dx-\frac{7}{16}\int\frac{1}{u}du+\frac{3}{8}\int u^{-2}du$$

$$\frac{7}{16}ln|x|+\frac{1}{2}\left(\frac{x^{-1}}{-1}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{x^{-2}}{-2}\right)-\frac{7}{16}ln|u|+\frac{3}{8}\left(\frac{u^{-1}}{-1}\right)+c$$

$$\frac{7}{16}(ln|x|-ln|x-2|)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{x^2}\right)-\frac{3}{8}\left(\frac{1}{x-2}\right)+c$$

$$\frac{7}{16}ln\frac{|x|}{|x-2|}+\frac{-4x(x-2)-(x-2)-3x^2}{8x^2(x-2)}+c$$

$$ln\sqrt[16]{\left|\frac{x}{x-2}\right|^7}+\frac{-4x^2+8x-x+2-3x^2}{8x^2(x-2)}+c$$

$$ln\sqrt[16]{\left|\frac{x}{x-2}\right|^7}+\frac{7x-7x^2+2}{8x^2(x-2)}+c$$

Por lo tanto: $\int\frac{x+1}{x^5-4x^4+4x^3}dx=ln\sqrt[16]{\left|\frac{x}{x-2}\right|^7}+\frac{7x-7x^2+2}{8x^2(x-2)}+c$

Nota: En algunos casos se pueden tener la combinación de los casos anteriores, por lo tanto se harán las separaciones correspondientes para cada caso que se presente.

Ejercicios:

1. $\int\frac{1}{x^4+2x^3+x^2}dx$ R: $ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^2-\frac{2x+1}{x^2+x}+c$
2. $\int\frac{x^3-2x-4}{x^4+2x^3}dx$ R: $\frac{1}{x^2}+ln|x+2|+c$.
3. $\int\frac{3x^2-13x+8}{x^3-4x^2+4x}dx$ R: $ln\left|x^3-2x^2\right|+\frac{3}{x-2}+c$.
4. $\int\frac{3x^3+9x^2-12x-72}{(x^2-2x-8)^2}dx$ R: $ln\sqrt[3]{\frac{|x-4|^{11}}{(x+2)^2}}-\frac{5x+16}{x^2-2x-8}+c$.
5. $\int\frac{28-8x-5x^2-x^3}{x^4+16-8x^2}dx$ R: $ln\frac{|x+2|}{(x-2)^2}+\frac{6-x}{x^2-4}+c$.
6. $\int\frac{x^4}{x^3-3x^2+3x-1}dx$ R: $\frac{1}{2}(x+3)^2+ln(x-1)^6+\frac{7-8x}{2(x-1)^2}+c$; $\frac{1}{2}x^2+3x+ln(x-1)^6+\frac{7-8x}{2(x-1)^2}+c$.

7. $\int \frac{x^3+1}{x^4-3x^3+3x^2-x}dx$ R: $ln\frac{(x-1)^2}{|x|}-\frac{x}{(x-1)^2}+c$

8. $\int \frac{x^2+5x-12}{x^3-5x^2+3x+9}dx$ R: $ln\frac{(x-3)^2}{|x+1|}-\frac{3}{x-3}+c$.

9. $\int \frac{3t-7t^2+7}{t^3-3t+2}dt$ R: $ln\frac{1}{|t+2|^3(t-1)^4}-\frac{1}{t-1}+c$.

10. $\int \frac{10+7x+2x^2-3x^3}{x^4-2x^3-4x^2+2x+3}dx$ R: $ln\frac{1}{|x-3|(x-1)^2}-\frac{1}{x+1}+c$.

C) Caso III. Términos irreducibles cuadráticos que no se repiten.
Dependiendo del número de factores que contenga el denominador, será el número de fracciones parciales en que se descompondrá el integrando, de la siguiente forma:

$$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}+\frac{Cx+D}{dx^2+ex+f}+\frac{Ex+F}{gx^2+hx+i}+\ldots$$

Ejemplo: $\int \frac{x-1}{x^4+3x^2+2}dx$

Solución: Factorizamos el denominador.

$$x^4+3x^2+2$$
$$(x^2+1)(x^2+2)$$

Sustituimos en la integral.

$$\int \frac{x-1}{(x^2+1)(x^2+2)}dx$$

Tomamos el integrando y lo separamos en tantas fracciones parciales como factores tenga el denominador.

$$\frac{x-1}{(x^2+1)(x^2+2)}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{x^2+2}$$

Multiplicamos ambos la dos de la igualdad por el factor común y simplificamos.

$$(x^2+1)(x^2+2)\left[\frac{x-1}{(x^2+1)(x^2+2)}\right]=\left[\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{x^2+2}\right](x^2+1)(x^2+2)$$
$$x-1=(Ax+B)(x^2+1)+(Cx+D)(x^2+2)$$
$$x-1=A(x^3+x)+B(x^2+1)+C(x^3+2x)+D(x^2+2)$$
$$x-1=x^3(A+C)+x^2(B+D)+x(A+2C)+(B+2D)$$

$0=x^3(A+C)$ $0=x^2(B+D)$ $1=x(A+2C)$ $-1=B+2D$

$A+C=0$ $B+D=0$ $A+2C=1$ $B+2D=-1$

Resolvemos los sistemas lineales dos por dos, respectivamente.

$$-A - C = 0 \qquad\qquad -B - D = 0$$
$$\underline{A + 2C = 1} \qquad\qquad \underline{B + 2D = -1}$$
$$0 + C = 1 \qquad\qquad 0 + D = -1$$
$$C = 1 \qquad\qquad D = -1$$
$$A + 1 = 0 \qquad\qquad B - 1 = 0$$
$$A = -1 \qquad\qquad B = 1$$

Sustituimos en las fracciones parciales los valores correspondientes de las constantes:

$$\frac{x-1}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+2\right)} = \frac{-x-1}{x^2+1} + \frac{x+1}{x^2+2}$$

Sustituimos el integrando por las fracciones parciales, separamos las integrales y simplificamos.

$$\int\left(\frac{-x+1}{x^2+1} + \frac{-x+1}{x^2+2}\right)dx$$
$$\int\frac{-x+1}{x^2+1}dx + \int\frac{-x+1}{x^2+2}dx$$
$$-\int\frac{x}{x^2+1}dx + \int\frac{1}{x^2+1}dx - \int\frac{x}{x^2+2}dx + \int\frac{1}{x^2+2}dx$$
$$\int\frac{1}{x^2+1}dx - \int\frac{x}{x^2+1}dx - \int\frac{x}{x^2+2}dx + \int\frac{1}{x^2+2}dx$$

Analizando el segundo y tercer término de la integral tenemos.

$$u = x^2 + 1 \qquad\qquad v = x^2 + 2$$
$$du = 2x\,dx \qquad\qquad dv = 2x\,dx$$
$$\frac{du}{2} = x\,dx \qquad\qquad \frac{dv}{2} = x\,dx$$

Sustituyendo los datos anteriores y reescribiendo el primer y cuarto término.

$$\int\frac{1}{x^2+(1)^2}dx - \int\frac{\frac{du}{2}}{u} - \int\frac{\frac{dv}{2}}{v} + \int\frac{1}{x^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}dx$$

Aplicando las fórmulas correspondientes integramos y simplificamos.

$$\int\frac{1}{x^2+(1)^2}dx - \frac{1}{2}\int\frac{du}{u} - \frac{1}{2}\int\frac{dv}{v} + \int\frac{1}{x^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}dx$$
$$arc\tan\frac{x}{1} - \frac{1}{2}\ln|u| - \frac{1}{2}\ln|v| + \frac{1}{\sqrt{2}}arc\tan\frac{x}{\sqrt{2}} + c$$
$$arc\tan x - \frac{1}{2}\left(\ln\left|x^2+1\right| + \ln\left|x^2+2\right|\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}arc\tan\frac{\sqrt{2}}{2}x + c$$
$$arc\tan x - \frac{1}{2}\ln\left(\left|x^2+2\right|\left|x^2+1\right|\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}arc\tan\frac{\sqrt{2}}{2}x + c$$
$$arc\tan x - \ln\sqrt{\left|x^4+3x^2+2\right|} + \frac{\sqrt{2}}{2}arc\tan\frac{\sqrt{2}}{2}x + c$$

Por lo tanto: $\int \frac{x-1}{x^4+3x^2+2}dx = arc\tan x - ln\sqrt{|x^4+3x^2+2|} + \frac{\sqrt{2}}{2}arc\tan\frac{\sqrt{2}}{2}x + c$

Ejercicios:

1. $\int \frac{3x^3-x^2+4x+1}{x^4+3x^2+2}dx$ R: $ln\left|(x^2+2)\sqrt{x^2+1}\right| + 2arc\tan x - \frac{3\sqrt{2}}{2}arc\tan\frac{\sqrt{2}}{2}x + c$.

2. $\int \frac{-2x^2-2x+16}{x^3+8}dx$ R: $ln\frac{|x+2|}{\sqrt{|x^2-2x+4|^3}} + \sqrt{3}arc\tan\frac{\sqrt{3}(x-1)}{3} + c$.

3. $\int \frac{-2x^3-15x^2+2x+5}{(x^2+2x+1)(x^2-4x+5)}dx$ R: $ln\left(\frac{x+1}{x^2-4x+5}\right)^2 + \frac{1}{x+1} - 8arc\tan(x-2) + c$.

4. $\int \frac{-3x^3-4x^2+2x+11}{(x^2-2x+1)(x^2+x+4)}dx$ R: $ln\frac{1}{|x-1|^3} - \frac{1}{x-1} - \frac{2\sqrt{15}}{3}arc\tan\frac{\sqrt{15}(2x+1)}{15} + c$.

5. $\int \frac{5x^2-x+6}{x^3+2x-3}dx$ R: $ln\left[(x-1)^2\sqrt{|x^2+x+3|^3}\right] - \frac{3\sqrt{11}}{11}arc\tan\frac{\sqrt{11}(2x+1)}{11} + c$.

Caso IV. Factores cuadráticos irreducibles que se repiten.

En este caso se tendrá un término cuadrático elevado a un exponente que es el número de veces que se repite, este exponente nos dará el número de fracciones parciales en que se dividirá el integrando:

$$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} + \frac{Cx+D}{(ax^2+bx+c)^2} + \frac{Ex+F}{(ax^2+bx+c)^3} + \ldots + \frac{Yx+Z}{(ax^2+bx+c)^n}$$

Ejemplo: $\int \frac{2x^2+3}{x^4+2x^2+1}dx$

Solución: Procedemos a factorizar el denominador.

$$x^4+2x^2+1$$
$$(x^2+1)^2$$

Sustituimos en la integral.

$$\int \frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2}dx$$

Observamos que tenemos un factor cuadrático irreducible repetido, exponente de dicho factor indica el número de fracciones parciales en que descompondremos el integrando.

$$\frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}$$

Multiplicamos ambos la dos de la igualdad por el común denominador y simplificamos.

$$(x^2+1)^2\left[\frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2}\right] = \left[\frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}\right](x^2+1)^2$$

$$2x^2+3=(Ax+B)(x^2+1)+Cx+D$$

$$2x^2+3=Ax(x^2+1)+B(x^2+1)+Cx+D$$

$$2x^2+3=Ax^3+Ax+Bx^2+B+Cx+D$$

$$2x^2+3=x^3(A)+x^2(B)+x(A+C)+(B+D)$$

$$0=x^3(A) \qquad A=0$$

$$2x^2=x^2(B) \qquad B=2$$

$$0=x(A+C) \qquad A+C=0 \qquad 0+C=0 \qquad C=0$$

$$3=B+D \qquad 2+D=3 \qquad D=1$$

Una vez que se han obtenido los valores de A, B, C y D, los sustituimos en las fracciones parciales.

$$\frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2}=\frac{0x+2}{x^2+1}+\frac{0x+1}{(x^2+1)^2}$$

$$\frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2}=\frac{2}{x^2+1}+\frac{1}{(x^2+1)^2}$$

Sustituimos el integrando por las fracciones parciales en la integral:

$$\int\left(\frac{2}{x^2+1}+\frac{1}{(x^2+1)^2}\right)dx$$

Separando las integrales con las fórmulas correspondientes tenemos:

$$2\int\frac{1}{x^2+1}dx+\int\frac{1}{(x^2+1)^2}dx$$

Se tiene una fórmula para resolver la primera integral, para la segunda aplicamos un procesos algebraico para transformarla y emplear sustitución trigonométrica.

$$2\int\frac{1}{x^2+(1)^2}dx+\int\frac{1}{(x^2+1)^{\frac{4}{2}}}dx$$

$$2\int\frac{1}{x^2+(1)^2}dx+\int\frac{1}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^4}dx$$

En la primera parte:

$$2\int\frac{1}{x^2+(1)^2}dx=2\left(arc\ tan\frac{x}{1}\right)$$

Para la segunda:

$$\int\frac{1}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^4}dx=\int\frac{1}{\left(\sqrt{x^2+(1)^2}\right)^4}dx=\int\frac{1}{(\sec\theta)^4}\sec^2\theta\,d\theta=\int\frac{\sec^2\theta}{\sec^4\theta}d\theta=\int\frac{1}{\sec^2\theta}d\theta=\int\cos^2\theta\,d\theta=$$

$\sqrt{x^2+1}$, x, θ, 1

$\frac{x}{1}=\tan\theta$

$x=\tan\theta$

$dx=\sec^2\theta\, d\theta$

$\frac{\sqrt{x^2+1}}{1}=\sec\theta$

$\sqrt{x^2+1}=\sec\theta$

$$\int\frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)\,d\theta=\frac{1}{2}\int(1+\cos 2\theta)\,d\theta=$$

$$\frac{1}{2}\int d\theta+\frac{1}{2}\int\cos 2\theta\, d\theta=\frac{1}{2}\int d\theta+\frac{1}{2}\int\cos u\frac{du}{2}=$$

$$\frac{1}{2}\int d\theta+\frac{1}{4}\int\cos u\, du=\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{4}\operatorname{sen} u+c=$$

$u=2\theta$

$du=2d\theta$

$\frac{du}{2}=d\theta$

$$\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{4}\operatorname{sen}2\theta+c=\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{4}(2\operatorname{sen}\theta\cos\theta)+c=\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta\cos\theta+c=$$

$$\frac{1}{2}\arctan x+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)+c=\frac{1}{2}\arctan x+\frac{x}{2(x^2+1)}+c$$

Sumando los resultados de las dos partes y simplificando:

$$2\arctan x+\frac{1}{2}\arctan x+\frac{x}{2(x^2+1)}+c$$

$$\frac{5}{2}\arctan x+\frac{x}{2(x^2+1)}+c$$

Por lo tanto: $\int\frac{2x^2+3}{x^4+2x^2+1}dx=\frac{5}{2}\arctan x+\frac{x}{2(x^2+1)}+c$

Nota: En algunas integrales se puede tener la combinación de dos, tres o los cuatro casos, por lo tanto se harán las separaciones correspondientes para cada caso que se presente.

Ejercicios:

1. $\int\frac{3x^3+4x-5}{x^4+4x^2+4}dx$ R: $\ln\sqrt{|x^2+2|^3}-\frac{5\sqrt{2}}{8}\arctan\frac{\sqrt{2}}{2}x-\frac{5x+4}{4(x^2+2)}+c$.

2. $\int\frac{5x^2+18}{x^5+6x^3+9x}dx$ R: $\ln\frac{x^2}{|x^2+3|}+\frac{1}{2(x^2+3)}+c$.

3. $\int\frac{x^3-2x^2+1}{4x^6+4x^4+x^2}dx$ R: $-2\sqrt{2}\arctan\sqrt{2}x-\frac{16x^2+x+4}{4x(2x^2+1)}+c$.

4. $\int\frac{x^4+4x^2-x+3}{x^6+3x^2+3x^4+1}dx$ R: $2\arctan x+\frac{4x^3+4x+1}{4(x^2+1)^2}+c$.

5. $\int\frac{3x^2+5x+3}{(x^2+x+1)^2}dx$ R: $\frac{14\sqrt{3}}{9}\arctan\frac{\sqrt{3}(2x+1)}{3}-\frac{2x+4}{3(x^2+x+1)}+c$

$\frac{14\sqrt{3}}{9}\arctan\frac{\sqrt{3}(2x+1)}{3}-\frac{2x+4x^2}{3(x^2+x+1)}+c$.

MISCELÁNEA

La mayoría de las integrales re quieren de una combinación de métodos de integración para resolverlas: integración por partes y fracciones parciales, cambio de variables y fracciones parciales, etc.

1. $\int\frac{\ln(e^{2x}-2)}{e^{2x}}dx$, por partes. R: $\ln\sqrt[4]{|1-2e^{-2x}|}-\frac{1}{e^{2x}}\ln\sqrt{|e^{2x}-2|}+c$.

2. $\int \frac{1}{(1+\cos x)^2}dx$, identidades. R: $\frac{1}{2}tan\frac{x}{2}+\frac{1}{6}tan^3\frac{x}{2}+c$; $\frac{2}{3}csc^3 x+cot\,x+\frac{2}{3}cot^3 x+c$.

3. $\int \frac{x}{(x^2-4x+13)^{\frac{5}{2}}}dx$, Sustitución Trigonométrica. R: $\frac{4x^3-12x^2+48x-105}{243(x^2-4x+13)\sqrt{x^2-4x+13}}+c$.

4. $\int arc\,sen\sqrt{x}\,dx$, cambio de variable y por partes. R: $x\,arc\,sen\sqrt{x}+\frac{1}{2}\sqrt{x-x^2}-\frac{1}{2}arc\,sen\sqrt{x}+c$.

5. $\int \frac{ln\,y}{(y+1)^3}dy$, por partes y fracciones parciales. R: $\frac{y+1-ln|y|}{2(y+1)^2}+ln\sqrt{\left|\frac{y}{y+1}\right|}+c$.

6. $\int\left(sec^2\frac{x}{2}+csc^2\frac{x}{2}\right)^2 dx$, identidades y potencias trigonométricas. R: $-16\,cot\,x\left(\frac{1}{3}cot^2 x+1\right)+c$; $\frac{2}{3}tan^3\frac{x}{2}+2\,tan\frac{x}{2}-8\,cot\,x-\frac{2}{3}cot^3\frac{x}{2}-2\,cot\frac{x}{2}+c$; $\frac{2}{3}tan^3\frac{x}{2}+6\,tan\frac{x}{2}-\frac{2}{3}tan\frac{x}{2}-6\,cot\frac{x}{2}+c$

7. $\int \frac{x\,ln\,x}{\sqrt{x^2-4}}dx$, por partes y sust. Trigonométrica. R: $\sqrt{x^2-4}\,ln\,x-\sqrt{x^2-4}+2arc\,sen\frac{x}{2}+c$.

8. $\int \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx$, cambio de variable. R: $2\sqrt{e^x-1}-4arc\,tan\frac{\sqrt{e^x-1}}{2}+c$.

9. $\int \frac{1}{\sqrt{x^3}(\sqrt{x}-1)}dx$, cambio de variable y fracciones parciales. R: $\frac{2}{\sqrt{x}}+ln\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{|x|}+c$.

10. $\int \frac{1}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx$, cambio de variable y sust. Trigonométrica. R: $ln\left|\frac{1-\sqrt{1-e^{2x}}}{e^x}\right|+c$; $ln\left|\frac{e^x}{1+\sqrt{1-e^{2x}}}\right|+c$.

11. $\int ye^{y^2}sen\,y^2 dy$, cambio de variable y por partes. R: $\frac{1}{4}e^{y^2}(sen\,y^2-cos\,y^2)+c$.

12. $\int arc\,tan\sqrt{x}\,dx$, cambio de variable y por partes. R: $x\;arc\,tan\sqrt{x}-\sqrt{x}+arc\,tan\sqrt{x}+c$.

13. $\int \frac{arc\,tan\sqrt{x}}{x^2}dx$, cambio de variables, por partes y fracciones parciales. R: $-\frac{arc\,tan\sqrt{x}}{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}-arc\,tan\sqrt{x}+c$.

14. $\int arc\,sen\frac{1}{x}dx$, por partes y sust. Trigonométrica. R: $x\;arc\,sen\frac{1}{x}+ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+c$.

15. $\int ln(1+\sqrt{x})dx$, cambio de variable y fracciones parciales. R: $x\,Ln(1+\sqrt{x})-\frac{1}{2}(\sqrt{x}-1)^2-arc\,tan\sqrt{x}+c$; $x\,Ln(1+\sqrt{x})-\frac{1}{2}x+\sqrt{x}-arc\,tan\sqrt{x}+c$.

16. $\int\sqrt{e^x+1}\,dx$, cambio de variable y fracciones parciales. R: $2\sqrt{e^x+1}+ln\left|\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}\right|+c$; $2\sqrt{e^x+1}+ln(\sqrt{e^x+1}-1)^2-x+c$.

PROBLEMAS DE APLICACIÓN

CONTEXTO GEOMETRICO.

Determina el área de la región del plano limitada por:

1. La curva con ecuación $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, con $a>b>0$. R: $ab\pi u^2$.

2. Las curvas con ecuaciones $x^2+y^2=16$ y $9x^2+16y^2=144$. R: $4\pi u^2$.

BIOLOGÍA – MEDICINA.

3. Un doctor al revisar una placa de una resonancia magnética observa una mancha de forma elíptica que probablemente puede ser un tumor, al medirla se obtienen los datos como se muestra en la figura. Calcula el volumen del posible tumor.

3cm

5cm

R: $\frac{15}{2}\pi cm^3$.

4. En un cultivo de levadura, la rapidez de cambio de la cantidad de esta es proporcional a la cantidad existente, para cualquier instante t. Si la cantidad de cultivo se duplica en 4 horas, ¿Qué aumento puede esperarse al cabo de 12 horas, con la misma rapidez de crecimiento? R: 8 veces más.

5. Determina la constante de proporcionalidad (tasa de crecimiento promedio). Una población está creciendo a una tasa proporcional a su tamaño donde la población se duplica cada 40 días. R: $\frac{1}{40}ln2$.

6. La tasa de crecimiento de cierto cultivo de bacterias es proporcional a su tamaño. Si el cultivo de bacterias se duplica cada 20 minutos. ¿Cuánto tiempo tardará el cultivo en multiplicarse por 12 veces el tamaño inicial?

R: $\frac{20ln12}{ln2}min$.

7. La velocidad de absorción de la ampicilina en el organismo, está dada según la función $e^{-\frac{1}{500}t}\frac{mg}{min}$. Determina: a) La función que describe la absorción (cantidad absorbida) de la ampicilina en el organismo a los t minutos. b) La cantidad de ampicilina en mg absorbida y presente en el organismo a las $8hrs$. Si la dosis es de $500mg$.

R: a) $P(t)=500-500e^{-\frac{1}{500}t}$; b) $500-500e^{-\frac{2}{125}}mg$.

8. Se inyectaron cinco miligramos de cierta droga a un paciente y la cantidad de de droga presente, t horas después de haberse inyectado satisface la ecuación diferencial: $P'(t)=-\frac{9}{100}P(t)\frac{mg}{hr}$. a) Determina la función $P(t)$. b) Obtén la cantidad de droga presente 20 horas después de haberse aplicado la inyección.

R: a) $P=5e^{-\frac{9}{100}t}mg$. b) $5e^{-\frac{9}{5}}mg$.

9. El peso en gramos después de t años, $P(t)$ de cierta sustancia radiactiva k, satisface la ecuación diferencial: $P'(t)=-\frac{2}{25}P(t)$; $P(0)=30$. a) Determina la función $P(t)$. b) ¿Cuánto pesará la sustancia al transcurrir los primeros 10 años?

R: a) $P(t)=30e^{-\frac{2}{25}t}$; b) $30e^{-\frac{2}{5}}g$.

10. Se sabe que la población de cierta comunidad aumenta con una rapidez proporcional al número de personas presentes en cualquier instante. Encuentra la población $P(t)$ para cualquier instante. Si la población se ha duplicado en 5 años ¿En cuanto tiempo se triplicará? R: $\frac{5\ln 3}{\ln 2}$ años.

11. Un rico industrial fue encontrado asesinado en su casa. La policía llegó a las $11:00\,p.m.$ la temperatura del cadáver en ese momento era de $31°C$ y una hora después era de $30°C$. La temperatura de la habitación en que se encontró el cuerpo era de $22°C$. Calcula la hora en que ocurrió el crimen (considera $37°C$ como la temperatura promedio del cuerpo humano). R: aprox $6:39\,p.m.$

12. Un grupo de biólogos estudiaron los efectos alimenticios en ratas, las que alimentaron con una dieta en la que P representaba el porcentaje de proteína en una mezcla de levadura y maíz. Si el aumento promedio de peso G (en gramos) de una rata respecto al porcentaje de contenido proteico está dado por: $G(p) = -\frac{P}{25} + 2$, $0 \le P \le 10$ y además, para $P = 10$ se observó un aumento en el peso promedio de $38g$, expresa G en función del porcentaje de contenido proteínico. R: $G(p) = -\frac{P^2}{50} + 2P + 20$

SOCIAL, ECONÓMICA-ADMINISTRATIVA.

13. La fábrica de pantalones "YATAUSAO" tiene una producción semanal de x pantalones con un costo marginal por pantalón de \$50.00. Determinar: a) La función que describe el costo de producción semanal (en términos del número de pantalones producidos en una semana), si el costo fijo semanal de la fábrica es de \$1000.00. b) El costo de producir 40 pantalones a la semana. R: a) $C(x) = 50x + 1000$; b) $C(40) = 3000$.

14. La población de cierta ciudad crece a un ritmo de $35000e^{\frac{7}{200}t}\ \frac{hab.}{año}$, donde t está dado en años. Determina: a) La función que describe el número de habitantes $P(t)$, si la población inicial es de 1000000 habitantes. b) ¿Cuántos habitantes habrá al transcurrir los primeros 6 años? R: a) $P(t) = 10^6 e^{\frac{7t}{200}}$; b) $P(6) = 10^6 e^{\frac{21}{100}}$

FÍSICA.

15. Se necesita una fuerza de $200\,dinas$ para mantener un resorte comprimido a $8cm$ siendo su longitud natural de $10cm$: Encuentra el trabajo realizado al comprimir el resorte $6cm$ a partir de su longitud normal (La ley de Hooke se aplica tanto a compresión como al estiramiento). R: $W = 1800\,ergs$.

16. Un resorte de longitud normal de $7cm$, se comprime hasta que tiene una longitud de $5cm$. Si en este proceso se hizo un trabajo de $600\,J$. a) ¿Cuanto trabajo se requiere para estirarlo de una longitud de $10cm$ a una longitud de $12cm$. b) ¿Que trabajo se requiere para comprimirlo de una longitud de $6cm$ a una de $4cm$? R: a) $2400J$; b) $1200J$.

17. La longitud natural de un resorte es de $20cm$. Para mantenerlo estirado hasta una longitud de $30cm$ se requieren $2.5N$. ¿Cuanto trabajo se ha de realizar para estirar el resorte desde $20cm$ hasta $25cm$? R: $\frac{1}{32}J$.

18. Una jeringa cuyo recipiente útil tiene una longitud de $5cm$ y diámetro de $\frac{6}{5}cm$, está llena con un medicamento cuya densidad es de $11760\ \frac{N}{m^3}$. Este fluido se aplicará al músculo correspondiente con una aguja

[illegible] ¿Cuál es el trabajo realizado para vaciar por completo la jeringa? b) Si solo se aplican 3 [illegible] ¿cuánto será el trabajo? R: a) $\frac{1323}{781250}\pi J$; b) $\frac{27783}{31250000}\pi J$.

[illegible] lanzada verticalmente hacia arriba con una velocidad de $10\frac{m}{s}$ desde un risco a $300m$ de [illegible] la altura máxima alcanzada por la piedra. b) La velocidad con la que llega al suelo. [illegible] $-g$ R: a) $\frac{14950}{29}m$; b) $-2\sqrt{1495}\frac{m}{s}$.

[illegible] en forma de cono circular recto, con su vértice hacia abajo, está lleno de agua a un nivel de la [illegible] altura. Si su altura es de $7m$ y su diámetro en la parte superior es de $2m$, calcula el trabajo [illegible] bombear para sacar toda el agua por la parte superior del depósito. R: $\frac{300125}{72}\pi J$.

[illegible] una fuerza de $50N$ para mantener un resorte estirado $8cm$ más allá de su longitud natural. [illegible] trabajo se realiza al estirarlo desde su longitud natural hasta $12cm$ más allá de esta? R: $\frac{9}{2}J$.

[illegible] resorte tiene una longitud de $20cm$. Si se requiere una fuerza de $25N$ para mantenerlo estirado hasta [illegible] de $30cm$ a) ¿cuánto trabajo se necesita para mantenerlo estirado hasta una longitud de $30cm$. b) [illegible] trabajo se necesita para estirarlo desde $20cm$ hasta $25cm$? R: a) $\frac{5}{4}J$; b) $\frac{5}{16}J$.

[illegible] $6j$ de trabajo para estirar un resorte desde $10cm$ hasta $12cm$ y se requieren otros $10j$ para [illegible] desde $12cm$. Hasta $14cm$ ¿cuál es la longitud del resorte? R: $8cm$.

[illegible] Una cuerda de $20m$ de largo pesa $\frac{1}{2}\frac{kg}{m}$, cuelga en su totalidad desde la azotea de un edificio de $60m$ de [illegible] ¿Cuánto trabajo se realiza para subir la cuerda hasta la azotea? b) ¿Cuánto trabajo se realiza para subir [illegible] esta? R: a) $980j$; b) $735j$.

[illegible] que pesa $\frac{1}{5}\frac{kg}{m}$ para elevar $400kg$ de una profundidad de $150m$. Encuentra el trabajo [illegible] R: $643125J$.

[illegible] un diámetro de $16m$, los costados miden $\frac{7}{4}m$ de alto y la profundidad del agua [illegible] se requiere para vaciarla mediante bombeo, por un costado (la densidad del agua [illegible] $1m$ por arriba del borde. R: a) $940800\pi j$; b) $1881600\pi j$

[illegible] media de $810años$ y si hay $10gr$ al principio ¿cuánto queda al [illegible] de decrecimiento radiactivo en cualquier instante es proporcional a la [illegible] media de una sustancia radiactiva es el tiempo que transcurre [illegible] R: $\frac{10}{\sqrt[?]{1024}}gr$

28. En una reacción química de orden cero, la velocidad de reacción permanece constante. Tal es el caso del proceso catalítico de Haber para producir amoníaco (NH_3), en la que la velocidad de reacción es de $2.0\times10^{-4}\,\frac{molNH_3}{lt\,s}$ (expresada en términos del amoníaco formado). Determina: a) La función que describe la cantidad de amoníaco presente en términos del tiempo de reacción. Considere que al inicio de la reacción no hay amoníaco presente. b) La cantidad de amoníaco al cabo de 1 hora de iniciada la reacción.

R: a) $A(t)=\frac{t}{5000}$; b) $A(3600)=\frac{18}{25}$.

29. La *vida media* de una sustancia radiactiva es el tiempo que transcurre para que se desintegre la mitad de los átomos contenidos en una cantidad inicial. Si había inicialmente $100mg$ de una sustancia radiactiva, al cabo de 6 horas la masa disminuyó en 3%. La rapidez de decrecimiento radiactivo en cualquier instante es proporcional a la cantidad de sustancia presente. a) ¿Qué cantidad queda al cabo de 24 horas? b) Determina la vida media de esta sustancia.

R: a) $\frac{97^4}{100^3}mg$; b) $\frac{6(ln1-ln2)}{ln97-ln100}h$.

PRECALCULO

EXPRESION ALGEBRAICA

$$5a^3$$

a es la base.
3 es un exponente.
5 es coeficiente de a^3; y también a^3 es coeficiente de 5.

COEFICIENTES

$a+a=2a$

$3b^2=b^2+b^2+b^2$

EXPONENTES

$x^n=xxxxx\cdots x$ (x se multiplica n veces por si misma).

$x^n x^m=x^{n+m}$.

$\frac{x^n}{x^m}=x^{n-m}\Rightarrow x^0=1$; $x^{-n}=\frac{1}{x^n}$, $x^n=\frac{1}{x^{-n}}$ y $\left(\frac{x}{y}\right)^{-n}=\left(\frac{y}{x}\right)^n$.

$(x^n)^m=x^{nm}$.

$\sqrt[m]{x^n}=x^{\frac{n}{m}}$; $\sqrt[m]{x}=x^{\frac{1}{m}}$.

$(xy)^n=x^n y^n$; $\sqrt[m]{xy}=\sqrt[m]{x}\sqrt[m]{y}$.

$\left(\frac{x}{y}\right)^n=\frac{x^n}{y^n}$; $\sqrt[m]{\frac{x}{y}}=\frac{\sqrt[m]{x}}{\sqrt[m]{y}}$.

PRODUCTOS NOTABLES.

1) $a(b+c-d)=ab+ac-ad$ ley distributiva de la multiplicación con respecto de la suma.

2) $(a-b)(b+a)=a^2-b^2$.

3) $(a\pm b)(b\pm a)=(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$.

4) $(a+b+c)(a+b+c)=(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$.

5) $(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)=a^3\pm b^3$.

6) $(x+n)(x+m)=x^2+bx+c$; donde: $b=m+n$ y $c=mn$.

7) $(ax+m)(x+n)=ax^2+bx+c$; donde: $m+an=b;\ mn=c$.

8) $(ax+m)(ax+n)=a^2x^2+bx+c$; donde: $a(m+n)=b;\ mn=c$.

Desarrollo de un binomio a la n.

$(a\pm b)^0=1$ — 1

$(a\pm b)^1=a\pm b$ — 1 1

$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$ — 1 2 1

$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$ — 1 3 3 1

$(a\pm b)^4=a^4\pm 4a^3b+6a^2b^2\pm 4ab^3+b^4$ — 1 4 6 4 1

Las potencias de a descienden, mientras las de b ascienden.

Los coeficientes se pueden construir con el triángulo de pascal.

Si es diferencia los signos se van alternando empezando con positivo.

BINOMIO DE NEWTON

$$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b^1+n\frac{n-1}{2}a^{n-2}b^2+n\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}a^{n-3}b^3+\cdots$$

$$(a+b)^5=a^5+5a^{5-1}b^1+5\frac{5-1}{2}a^{5-2}b^2+5\frac{5-1}{2}\cdot\frac{5-2}{3}a^{5-3}b^3+5\frac{5-1}{2}\cdot\frac{5-2}{3}\cdot\frac{5-3}{4}a^{5-4}b^4+5\frac{5-1}{2}\cdot\frac{5-2}{3}\cdot\frac{5-3}{4}\cdot\frac{5-4}{5}a^{5-5}b^5$$

$$(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$$

FACTORIZACIONES

a) $ab+ac-ad=a(b+c-d)$.

b) $ab+ac-db-dc=a(b+c)-d(b+c)=(a-d)(b+c)$.

c) $a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$.

d) $x^2+bx+c=(x+m)(x+n)$; donde: $m+n=b$ y $mn=c$.

e) $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$.

f) $a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$.

DIVISIÓN

El procedimiento para realizar una división, es el mismo que para una división numérica:

$$\frac{784}{25}=\frac{numerador}{denominador}=\frac{dividendo}{divisor}$$

```
      31
25) 784
   -75
     34
    -25
      9
```

El resultado se escribe $\frac{784}{25}=31+\frac{9}{25}$

Con expresiones algebraicas se procede exactamente igual, por ejemplo:

$\frac{x^2+8x-3}{x-5}$, antes de iniciar, verificar que las potencias estén ordenadas en orden descendente.

$$\begin{array}{r} x \\ x-5\overline{)\ x^2+8x-2} \\ \underline{-x^2+5x} \\ 13x \end{array}$$

Primer paso $\frac{x^2}{x}=x$, ahora se multiplica x por el divisor $x-5$, y se resta.

$$\begin{array}{r} x+13 \\ x-5\overline{)\ x^2+8x-3} \\ \underline{-x^2+5x} \\ 13x-\ 3 \\ \underline{-13x+65} \\ 62 \end{array}$$

Segundo paso $\frac{13x}{x}=13$, ahora se multiplica x por el divisor $x-5$, y se resta.

Resultado: $\frac{x^2+8x-3}{x-5}=x+13+\frac{62}{x-5}$

ECUACIONES

Ejemplo 1: Ecuación de primer grado.

$$3x-7x+4=-(x-8)$$
$$-4x+4=8-x$$
$$-4x+x+4-4=8-x+x-4$$
$$-3x=4$$
$$\frac{-3x}{-3}=\frac{4}{-3}$$
$$x=-\frac{4}{3}$$

Ejemplo 2: Ecuación de primer grado con denominadores constantes:

$$\frac{3x}{2}+5=1-\frac{4-x}{3}$$
$$2(3)\left[\frac{3x}{2}+5\right]=\left[1-\frac{4-x}{3}\right]2(3)$$
$$9x+30=6-8+2x$$
$$7x+30=-2$$
$$7x=-32$$
$$x=-\frac{32}{7}$$

Ejemplo 3: Ecuaciones de primer grado con denominadores variables.

$$\frac{3}{x-4}=\frac{2}{x-3}+\frac{8}{x^2-7x+12}$$
$$\frac{3}{x-4}=\frac{2}{x-3}+\frac{8}{(x-4)(x-3)}$$
$$(x-4)(x-3)\left[\frac{3}{x-4}\right]=\left[\frac{2}{x-3}+\frac{8}{(x-4)(x-3)}\right](x-4)(x-3)$$
$$3(x-3)=2(x-4)+8$$
$$3x-9=2x-8+8$$
$$x-9=0$$
$$x=9$$

Cabe hacer notar que la técnica de multiplicar toda la ecuación por el m.cm de los denominadores, para hacer la una ecuación entera, se puede utilizar para cualquier tipo de ecuación que contenga denominadores.

Ejemplo 3:

Esta ecuación tiene coeficiente de x^2 igual a 1, y se va a resolver por factorización, utilizando el caso $d)$ de factorización.

$$x^2-5x+4=0$$

$$m+n=b \qquad mn=c$$

$$-1-4=-5 \qquad (-1)(-4)=5$$

$$(x-4)(x-1)=0$$

$$x_1-4=0 \Rightarrow x_1=4 \qquad x_2-1=0 \Rightarrow x_2=1$$

Ejemplo 4:

$$2x^2 - x - 15 = 0$$

Se va resolver por el método de *completar trinomio cuadrado perfecto*, iniciando por dividir toda la ecuación por el coeficiente de x^2, es decir, el 2.

$$x^2 - \frac{x}{2} - \frac{15}{2} = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{x}{2} = \frac{15}{2}$$

Ahora se completa el trinomio cuadrado perfecto, añadiendo la mitad del coeficiente del termino de primer grado al cuadrado, en ambos miembros

$$x^2 - \frac{x}{2} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{15}{2} + \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

El primer termino se factoriza y en el segundo se realizan las operaciones.

$$\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{121}{16}$$

Ahora para poder despejar a x, obtenemos raíz cuadrada, aplicándola a ambos miembros de la igualdad.

$$\left|x - \frac{1}{4}\right| = \frac{11}{4} \Rightarrow x - \frac{1}{4} = \pm\frac{11}{4}$$

$$x_1 - \frac{1}{4} = -\frac{11}{4} \Rightarrow x_1 = -\frac{10}{4} \Rightarrow x_1 = -\frac{5}{2}$$

$$x_2 - \frac{1}{4} = \frac{11}{4} \Rightarrow x_2 = \frac{12}{4} \Rightarrow x_2 = 3$$

Ejemplo 5: Se resolverá la misma ecuación, pero por factorización, empleando de forma similar el caso *b)* y *d)* de factorización:

$$2x^2 - x - 15 = 0$$

$$ac = 2(-15) = -30$$

$$-30 = -6(5)$$

$$-1 = -6 + 5$$

Encontramos dos números multiplicados que ahora no den c, sino ac. Y que sumados resulten $b = -1$.

Con estos números, se descompone el termino de primer grado en dos:

$$2x^2 - 6x + 5x - 15 = 0$$

Ahora se obtiene factor común a cada par de términos.

$$2x(x-3) + 5(x-3) = 0$$

Y nuevamente se obtiene factor común (el paréntesis)

$$(2x+5)(x-3) = 0$$

$$2x_1 + 5 = 0 \Rightarrow 2x_1 + 5 = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{5}{2}$$

$$x_2 - 3 = 0 \Rightarrow x_2 - 3 = 0 \Rightarrow x_2 = 3$$

Segundo procedimiento:

$$2x^2 - x - 15 = 0$$

$$\frac{2}{2}\left(2x^2 - x - 15 = 0\right)$$

Multiplicamos y dividimos a la ecuación por el valor de a, es decir, 2, dejando indicada la multiplicación del termino de primer grado.

$$\frac{4x^2 - x(2) - 30}{2} = 0$$

Esta ecuación sea transformado a una equivalente a la de coeficiente de x^2 igual a 1, y se va a resolver por factorización, utilizando el caso *d)* de factorización.

$$b = m + n \Rightarrow -1 = -6 + 5$$

$$c = mn \Rightarrow -30 = -6(5)$$

$$\frac{(2x-6)(2x+5)}{2} = 0$$

Factorizamos el dos que multiplicamos inicialmente, del paréntesis que nos de una factorización exacta.

$$\frac{2(x-3)(2x+5)}{2} = 0 \Rightarrow (2x+5)(x-3) = 0$$

$$2x_1 + 5 = 0 \Rightarrow 2x_1 + 5 = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{5}{2}$$

$$x_2 - 3 = 0 \Rightarrow x_2 - 3 = 0 \Rightarrow x_2 = 3$$

Se puede observar que ambos valores coinciden con los obtenidos con el método del ejemplo 4.

También sabemos que las ecuaciones de segundo grado, siempre se pueden resolver utilizando la formula general:

$ax^2 + bx + c = 0$ $\qquad$ $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Donde a , b y c son los coeficientes de la ecuación tomando en cuenta el signo que contengan en ese momento. El doble signo de la raiz nos proporciona las dos soluciones posibles del ejercicio.

Ejemplo 6:

$$x^3 + 4x^2 - 12x = 0$$

$$x\left(x^2 + 4x - 12\right) = 0$$

$$x(x+6)(x-2) = 0$$

Esta ecuación es cubica, pero observamos que todos los términos tienen el factor común x , entonces, factorizando:
Y la cuadrática que resulta dentro del paréntesis, es factorizable por algunos de los métodos ensayados.

$x_1 = 0$ $\qquad$ $x_2 + 6 = 0$, $x_2 = -6$ $\qquad$ $x - 2 = 0$, $x_3 = 2$

DESIGUALDADES
Dados dos números reales a y b , se dice que $a > b$, si en la recta real, a está situado a la derecha de b .

PROPIEDADES DE UNA DESIGUALDAD
i) Si se suman (o restan) cantidades iguales en ambos miembros de una desigualdad, la desigualdad se conserva.
Ejemplo:

$12 > 7$ Si se suma 2 a cada lado , en el resultado, el lado izquierdo sigue siendo mayor que el lado derecho por lo que la desigualdad se conserva:

$$12 + 2 > 7 + 2$$
$$14 > 9$$

ii) Si se multiplica (o dividen) ambos miembros de la desigualdad por la misma cantidad, si esta es positiva la desigualdad se conserva, si es negativa, la desigualdad se invierte. Ejemplos:

$12 > 7$ Si se multiplica por un 3 la desigualdad se conserva, porque el lado izquierdo sigue siendo mayor al lado derecho.

$$12(3) > 7(3)$$
$$36 > 21$$

$12 > 7$ Si se multiplica por un -3 la desigualdad se invierte, porque el lado derecho ahora es mayor al lado izquierdo.

$$12(-3) > 7(-3)$$
$$-36 < -21$$

Si a , b y c son números reales:
Exactamente uno de los siguientes enunciados es verdadero. *Propiedad de tricotomía del orden.* $\qquad$ $a < b$; $a = b$; $a > b$

Propiedad transitiva del orden
Si $a < b$ y $b < c \Rightarrow a < c$
Si $a > b$ y $b > c \Rightarrow a > c$

Propiedad de suma.
Si $a < b \Rightarrow a + c < b + c$
Si $a > b \Rightarrow a + c > b + c$

Propiedad de resta.
Si $a < b \Rightarrow a - c < b - c$
Si $a > b \Rightarrow a - c > b - c$

Propiedad de multiplicación.
Si $a < b$ y $c > 0 \Rightarrow ac < bc$
Si $a > b$ y $c > 0 \Rightarrow ac > bc$
Si $a < b$ y $c < 0 \Rightarrow ac > bc$
Si $a > b$ y $c < 0 \Rightarrow ac < bc$

Propiedad de la división.

$$\text{Si } a > b \text{ y } c > 0 \Rightarrow \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$$

$$\text{Si } a < b \text{ y } c > 0 \Rightarrow \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$$

$$\text{Si } a < b \text{ y } c < 0 \Rightarrow \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$$

$$\text{Si } a > b \text{ y } c < 0 \Rightarrow \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$$

Notación de Intervalos.

Notación de intervalo	Notación de desigualdad	Gráfica de línea	Tipo
$[a, b]$	$a \le x \le b$		Cerrado
$[a, b)$	$a \le x < b$		Semiabierto
$(a, b]$	$a < x \le b$		Semiabierto
(a, b)	$a < x < b$		Abierto
$[b, \infty)$	$x \ge b$		Cerrado
(b, ∞)	$x > b$		Abierto
$(-\infty, a]$	$x \le a$		Cerrado
$(-\infty, a)$	$x < a$		Abierto

VALOR ABSOLUTO.

$$|x| = k \begin{cases} x = k & si\, x \ge 0 \\ x = -k & si\, x < 0 \end{cases}$$

$$|x| \ge k \Rightarrow x \le -k \text{ ó } x \ge k$$

$$|x| \le k \Rightarrow -k \le x \le k$$

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

LOGARITMOS

DEFINICIÓN

$$log_b N = L \Leftrightarrow b^L = N \text{ con } N > 0,\ b > 0 \text{ y } b \ne 1.$$

Que se lee: el *logaritmo* de base b del número N es L, si y solo si, b elevado a la L es igual a N.

Nótese que el número N del cual se va calcular el logaritmo, debe ser positivo. Además la base también debe ser positiva y mayor que uno. Ejemplo:

$$log_{10} 100 = 2 \Leftrightarrow 10^2 = 100$$

$$log_2 8 = 3 \Leftrightarrow 2^3 = 8$$

Los sistemas de los logaritmos más utilizados, son los de *base* 10 o decimales y los de *base* e o logaritmos naturales. Es conveniente aclarar que como nomenclatura, las expresiones siguientes donde nose escribe la base, deben entenderse con las bases que se indican:

$$log\, A = log_{10} A$$

$$ln\, A = log_e A$$

LEYES DE LOS LOGARITMOS

1. $Ln 1 = 0$
2. $Ln e = 1$
3. $Ln e^x = x$
4. $e^{Ln x} = x$

1. $log_b 1 = 0$
2. $log_b b = 1$
3. $log_b b^x = x$
4. $b^{log_b x} = x$

5. $ln(PQ) = ln P + ln Q$

6. $ln\left(\frac{P}{Q}\right) = ln P - ln Q$

7. $ln P^m = m ln P$

5. $log_b(PQ) = log_b P + log_b Q$

6. $log_b\left(\frac{P}{Q}\right) = log_b P - log_b Q$

7. $log_b P^n = n\, log_b P$

Ejemplo 1: Si $log_3 81 = x$ ¿Cuánto vale el logaritmo x?
Basta llevar la expresión logarítmica dada a su forma exponencial:

$log_3 81 = x \Rightarrow 3^x = 81$

Y expresar ambos miembros de la igualdad en forma exponencial tomando en cuenta como referencia la *base* 3, es decir, 81 se debe poder escribir como $3^?$.

$3^x = 81 \Rightarrow 3^x = 3^? \Rightarrow 3^x = 3^4$

Y si las bases son iguales, entonces comparando los exponentes $x = 4$.

Ejemplo 2: Si $log_b 32 = 5$ ¿Cuánto vale la base b?

$log_b 32 = 5 \Rightarrow b^5 = 32$

$\sqrt[5]{b^5} = \sqrt[5]{32} \Rightarrow b = 2$

De nuevo la expresión logarítmica dada se escribe en forma exponencial, como se obtiene b^5 y la pregunta es b, se puede obtener una raíz quinta.

Ejemplo 3: Dado $log_8 x = \frac{1}{3}$, encontrar el valor de x.

$log_8 x = \frac{1}{3} \Rightarrow 8^{\frac{1}{3}} = x$

$8^{\frac{1}{3}} = x \Rightarrow \sqrt[3]{8} = x \Rightarrow x = 2$

De nuevo la expresión logarítmica dada se escribe en forma exponencial. Y al interpretar el exponente tenemos el valor de x

Ejemplo 4: Desarrollar la expresión $ln\sqrt[5]{\frac{(x+3)^7\sqrt{x-2}}{x^3+4}}$. Desarrollar significa aplicar las leyes de los logaritmos hasta que cada logaritmo esté aplicado a la expresión más simple posible:

$$ln\sqrt[5]{\frac{(x+3)^7\sqrt{x-2}}{x^3+4}} = ln\left(\frac{(x+3)^7\sqrt{x-2}}{x^3+4}\right)^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5}ln\frac{(x+3)^7\sqrt{x-2}}{x^3+4} =$$

$$\frac{1}{5}ln\frac{(x+3)^7\sqrt{x-2}}{x^3+4} = \frac{1}{5}\left[ln\left[(x+3)^7\sqrt{x-2}\right] - ln\left(x^3+4\right)\right] = \frac{1}{5}\left[ln(x+3)^7 + ln\sqrt{x-2} - ln\left(x^3+4\right)\right] =$$

$$\frac{1}{5}\left[7\,ln(x+3) + ln(x-2)^{\frac{1}{2}} - ln\left(x^3+4\right)\right] = \frac{1}{5}\left[7\,ln(x+3) + \frac{1}{2}ln(x-2) - ln\left(x^3+4\right)\right]$$

Ejemplo 6: Resolver la ecuación:

$log_7(x+5) + log_7(x-1) = 1$

Se van a combinar estos dos logaritmos en uno solo, para tener el logaritmo de un solo número o expresión.
El objeto es aplicar la definición para pasar la expresión o ecuación logarítmica a exponencial usando la definición. $log_b N = L \Leftrightarrow b^L = N$

$log_7(x+5)(x-1) = 1$

$7^1 = (x+5)(x-1)$

$x^2 + 4x - 5 = 7$

$x^2 + 4x - 12 = 0$

$(x+6)(x-2) = 0$

$x_1 + 6 = 0 \qquad x_2 - 2 = 0$

$x_1 = -6 \qquad x_2 = 2$

$log_7(2+5) + log_7(2-1) = 1$

$log_7(7) + log_7(1) = 1$

$log_7(7) + log_7(1) = 1$

$1 + 0 = 1$

$1 = 1$

$log_7(-6+5) + log_7(-6-1) = 1$

$log_7(-1) + log_7(-7) = 1$

$log_7\left[(-1)(-7)\right] = 1$

$log_7[7] = 1$

$1 = 1$

Ejemplo 7: Encontrar el valor de x.

$$8^{2x^2-4}=64^x$$

$$8^{2x^2-4}=\left(8^2\right)^x$$

$$8^{2x^2-4}=8^{2x}$$

$$2x^2-4=2x \Rightarrow 2x^2-2x-4=0 \Rightarrow x^2-x-2=0 \Rightarrow (x-2)(x+1)=0 \Rightarrow x_1=2\,,\,x_2=-1$$

FORMULARIO DE GEOMETRÍA

FIGURA GEOMETRICA	**VOLUMEN**	**AREA**
Esfera	$V=\frac{4}{3}\pi r^3$	$A=4\pi r^2$
Cilindro	$V=\pi r^2 h$	$A=2\pi r^2+2\pi rh$
Cono	$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$	$A=\pi r^2+\pi r\sqrt{r^2+h^2}$
Cubo	$V=a^3$	$A=6a^2$
	PERIMETRO	**AREA**
Sector Circular, θ en rad.	$s=r\theta$	$A=\frac{1}{2}r^2\theta$
Rectángulo.	$P=2b+2a$	$A=ba$
Triangulo.	$P=a+b+c$	$A=\frac{1}{2}bh$

TRIGONOMETRÍA

Teorema de Pitágoras: La suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.

$$(HIP)^2=(CO)^2+(CA)^2$$

$$HIP=\sqrt{(CO)^2+(CA)^2} \qquad CO=\sqrt{(HIP)^2-(CA)^2} \qquad CA=\sqrt{(HIP)^2-(CO)^2}$$

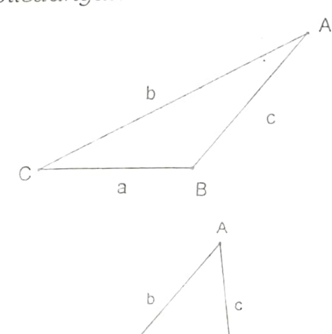
HIP
CO
θ
CA

$$\operatorname{sen}\theta=\frac{CO}{HIP} \qquad \csc\theta=\frac{HIP}{CO}$$

$$\cos\theta=\frac{CA}{HIP} \qquad \sec\theta=\frac{HIP}{CA}$$

$$\tan\theta=\frac{CO}{CA} \qquad \cot\theta=\frac{CA}{CO}$$

Triángulos oblicuángulos.



Ley de senos:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}A}=\frac{b}{\operatorname{sen}B}=\frac{c}{\operatorname{sen}C}$$

Ley de cosenos:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$$

$$c^2=b^2+a^2-2ab\cos C$$

IDENTIDADES TRIGONOMETRICAS

Fundamentales.

Recíprocas.

$$sen\,\theta=\frac{1}{\csc\theta}\qquad \cos\theta=\frac{1}{\sec\theta}\qquad \tan\theta=\frac{1}{\cot\theta}$$

Producto.

$$sen\,\theta\csc\theta=1\qquad \cos\theta\sec\theta=1\qquad \tan\theta\cot\theta=1$$

Cociente.

$$\tan\theta=\frac{sen\,\theta}{\cos\theta}\qquad \cot\theta=\frac{\cos\theta}{sen\,\theta}$$

Pitagóricas.

$$sen^2\theta+\cos^2\theta=1\qquad \tan^2\theta+1=\sec^2\theta\qquad \cot^2\theta+1=\csc^2\theta$$

Ángulo doble.

$$sen\,2\theta=2\,sen\,\theta\cos\theta$$

$$\cos 2\theta=\cos^2\theta-sen^2\theta$$
$$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$$
$$\cos 2\theta=1-2\,\text{sen}^2\,\theta$$

$$tan\,2\theta=\frac{2\,tan\,\theta}{1-tan^2\,\theta}$$

Ángulo mitad.

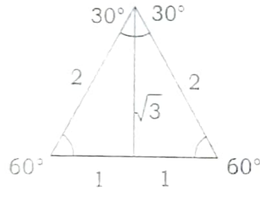
$$sen^2\,\theta=\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)\qquad \cos^2\theta=\frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)$$

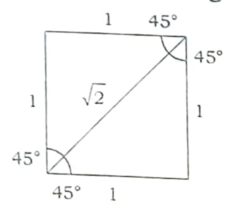
Suma y resta de ángulos.

$$sen(A+B)=sen\,A\cos B+cos\,A\,sen\,B$$
$$cos(A+B)=cos\,A\cos B-sen\,A\,sen\,B$$
$$tan(A+B)=\frac{tan\,A+tan\,B}{1-tan\,A\,tan\,B}$$

$$sen(A-B)=sen\,A\cos B-cos\,A\,sen\,B$$
$$cos(A+B)=cos\,A\cos B+sen\,A\,sen\,B$$
$$tan(A-B)=\frac{tan\,A-tan\,B}{1+tan\,A\,tan\,B}$$

Triángulos para calcular los valores exactos de las funciones trigonométricas de los ángulos de 30°,45° y 60°.





GEOMETRIA ANALITICA

Distancia entre dos puntos dados, $P_1(x_1,y_1)$ y $P_2(x_2,y_2)$:

$$D_{P_2P_1}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

Razón:

$$r=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

Punto medio:

$$P_m\left(\frac{x_2+x_1}{2},\frac{y_2+y_1}{2}\right)$$

Pendiente entre dos puntos, $P_1(x_1,y_1)$ y $P_2(x_2,y_2)$:

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

Ángulo entre dos rectas, con pendientes conocidas, m_1 y m_2:
α - Ángulo entre las dos rectas.

$$tan\,\alpha=\frac{m_2-m_1}{1+m_2m_1}$$

m_1 - Pendiente de la recta inicial, considerando el giro contrario de las manecillas del reloj.
m_2 - pendiente de la recta final.

RECTA

Que pasa por dos puntos $P_1(x_1,y_1)$ y $P_2(x_2,y_2)$: $$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

Forma simétrica con a abscisa y b ordenada ambas al origen, $I_x(a,0)$ y $I_y(0,b)$ $$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

Que tiene punto $P_1(x_1,y_1)$ y pendiente m: $$y-y_1=m(x-x_1)$$

Forma pendiente m y b ordenada al origen, $I_y(0,b)$ $$y=mx+b$$

Forma general. $$Ax+By+C=0$$

Forma normal. $$\frac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}}=0$$

Distancia de un punto $P(x_1,y_1)$ a la recta $\ell: Ax+By+C=0$ $$d_{P\ell}=\frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Condición de paralelismo y perpendicularidad.

$$m_1=m_2 \qquad m_1m_2=-1$$

Área.

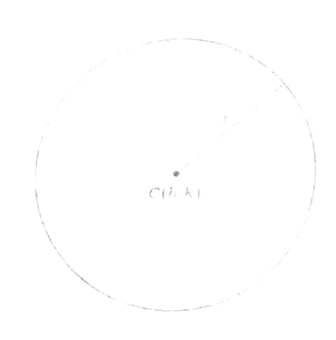
$$A=\left|\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & y_n \end{vmatrix}\right|$$

$$A=\frac{bh}{2}$$

$$b=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$h=\frac{|Ax_3+By_3+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

CIRCUNFERENCIA.



$$C(h,k)$$

$$r = radio$$

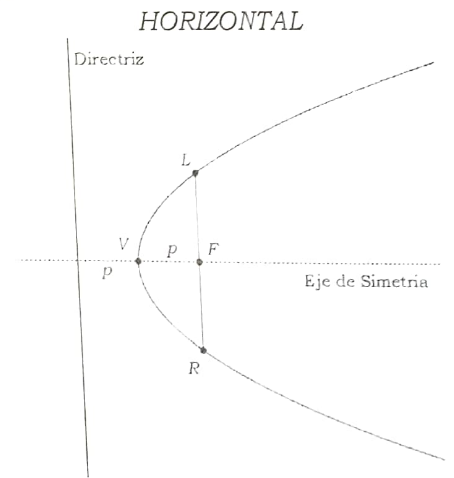
Ecuación forma ordinaria: $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$.

Ecuación forma general: $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$.

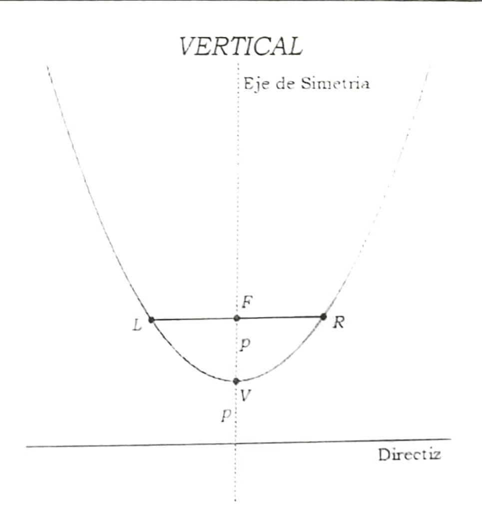
Donde $A=C$; $A>0$ y $C>0$.

PARABOLA.

HORIZONTAL



VERTICAL



V – vértice.
F – Foco.
L, R – Extremos del lado recto
$\overline{LR}$ - Lado recto $\left(LR = |4p|\right)$.

p - Distancia de vértice a foco $\left(D_{VF}\right)$ ó distancia de vértice a recta Directriz $\left(d_{Vl_D}\right)$

Ecuación forma ordinaria: $(y-k)^2 = \pm 4p(y-k)$

Ecuación forma general:

$$Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$$

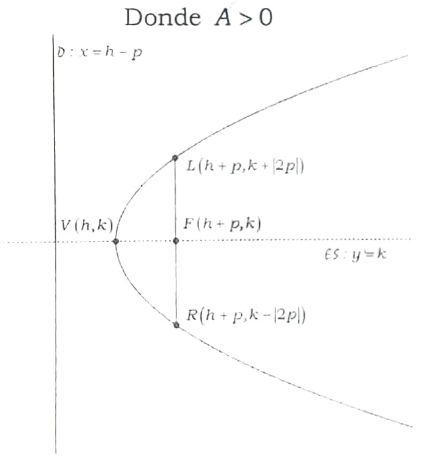
Donde $A > 0$

Ecuación forma ordinaria: $(x-h)^2 = \pm 4p(y-k)$

Ecuación forma general:

$$Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

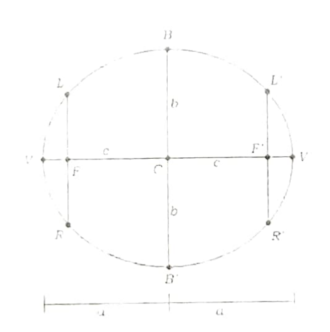
Donde $C > 0$



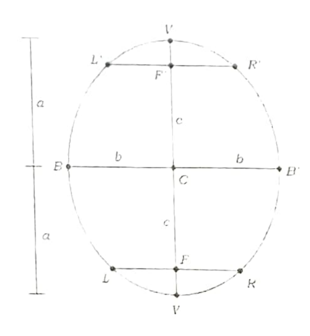
ES : x = h
F(h, k + p)
L(h − |2p|, k + p)
R(h + |2p|, k + p)
V(h,k)
D : y = k − p

ELIPSE.

HORIZONTAL

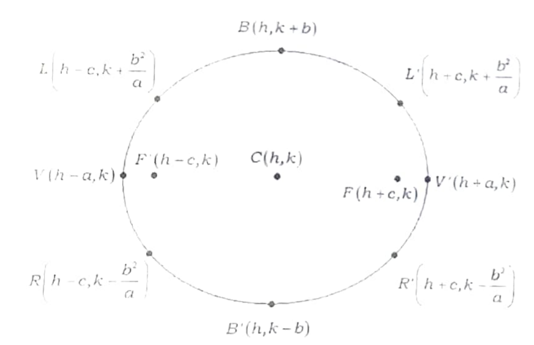


VERTICAL

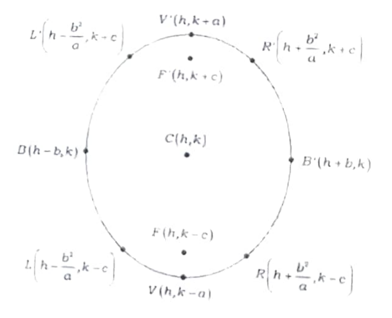


C – Centro,
V, V' - Vértices.
F, F' – Focos.
L, R, L', R' – Extremos del lado recto.
a – Semieje mayor $\left(\overline{VC} \text{ o } \overline{CV'}\right)$.
b – Semieje menor $\left(\overline{BC} \text{ o } \overline{CB'}\right)$.
c – Semieje focal $\left(\overline{FC} \text{ o } \overline{CF'}\right)$.
$\overline{VV'}$ - Eje mayor $(EM = 2a)$.
$\overline{BB'}$ - Eje menor $(Em = 2b)$
$\overline{FF'}$ - Eje focal $(EF = 2c)$.
$\overline{LR}$, $\overline{L'R'}$ - Lado recto $\left(LR = \dfrac{2b^2}{a}\right)$.
e – excentricidad $\left(e = \dfrac{c}{a}\right)$, donde $0 < e < 1$
Teorema de Pitágoras: $a^2 = b^2 + c^2$.
Ecuación general: $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, donde $A \neq C$; $A > 0$ y $C > 0$

Ecuación forma ordinaria: $\dfrac{(x-h)^2}{a^2} + \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

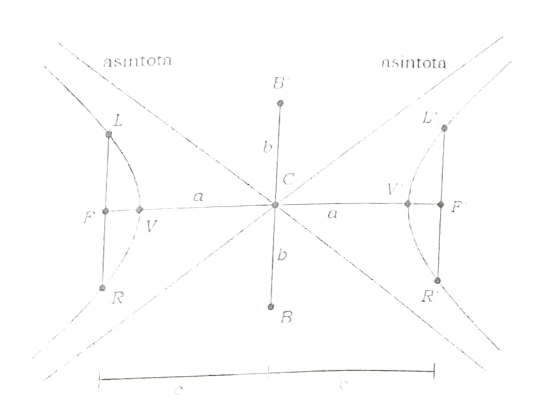


Ecuación forma ordinaria: $\dfrac{(x-h)^2}{b^2} + \dfrac{(y-k)^2}{a^2} = 1$

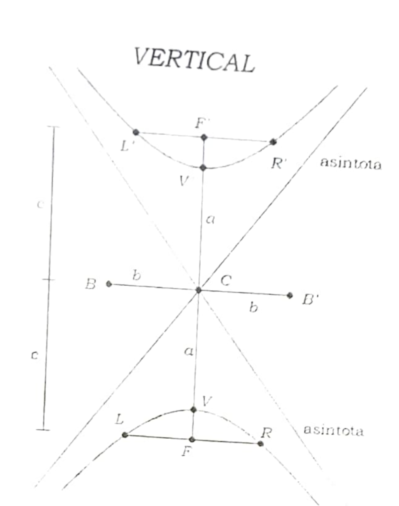


HIPERBOLA.

HORIZONTAL



VERTICAL



C - Centro.

V, V' - Vértices.

F, F' - Focos.

B, B' - Extremos del eje conjugado.

L, R, L', R' - Extremos del lado recto.

a - Semieje transverso $\left(\overline{VC} \text{ o } \overline{CV'}\right)$.

b - Semieje conjugado $\left(\overline{BC} \text{ o } \overline{CB'}\right)$.

c - Semieje focal $\left(\overline{FC} \text{ o } \overline{CF'}\right)$.

$\overline{VV'}$ - Eje transverso $(ET = 2a)$.

$\overline{BB'}$ - Eje conjugado $(EC = 2b)$.

$\overline{FF'}$ - Eje focal $(EF = 2c)$.

$\overline{LR}$ o $\overline{L'R'}$ - Lado recto $\left(LR = \frac{2b^2}{a}\right)$.

e – Excentricidad $\left(e = \frac{c}{a}\right)$, donde $e > 1$.

Teorema de Pitágoras: $c^2 = a^2 + b^2$.

Ecuación general: $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$; donde $A > 0$ y $C < 0$.

Ecuación forma ordinaria:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Asíntotas:

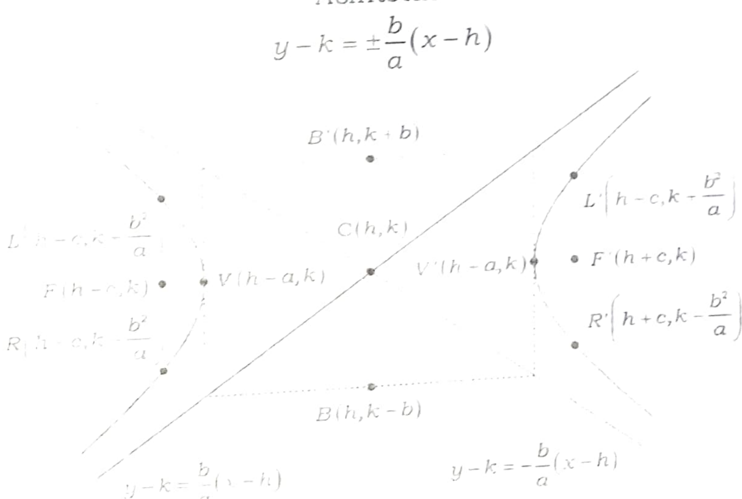
$$y - k = \pm\frac{b}{a}(x-h)$$

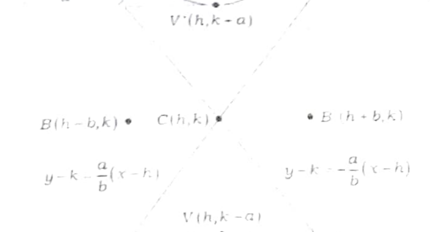
Ecuación forma ordinaria:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

Asíntotas:

$$y - k = \pm\frac{a}{b}(x-h)$$





Ejemplo: Identificar la grafica representada por la ecuación dada, y encontrar sus elementos principales: $y^2 - 6y - 4x + 9 = 0$.

Como la ecuación contiene una de las variables al cuadrado y la otra no, estamos posiblemente ante la ecuación de una parábola. Además como la variable cuadrática es y, de acuerdo a las formas mencionadas anteriormente, se trataría de una parábola con eje de simetría horizontal.

Se transforma la ecuación dada a su forma ordinaria.

$$y^2 - 6y = 4x - 9$$

$$y^2 - 6y + 9 = 4x - 9 + 9$$

$(y-3)^2 = 4x$

$(y-3)^2 = 4(x)$

La ecuación obtenida se compara con la ecuación ordinaria de la parábola: $(y-k)^2 = 4p(x-h)$.

Parábola es horizontal$(+)$, abre a la derecha, $V(0,3)$, $4p = 4 \Rightarrow p = 1$

$F(1,3)$, $D: x+1=0$, Ec. Eje **Simetría.**: $y-3=0$, $LR = 4$, Extremos del Lado Recto: $L(1,5)$ y $R(1,1)$.

Notas:

- Al completar el trinomio cuadrado perfecto, se debe agregar la misma cantidad (9) en ambos miembros de la igualdad para cumplir las propiedades de la igualdad.
- Las coordenadas de Vértice $V(h,k)$, son tomadas directamente de la ecuación obtenida (con signo contrario).
- Por estar el signo positivo antes de p, el foco se ubica a la derecha del vértice.
- La directriz resulta ser una recta vertical a la misma distancia del vértice al foco pero ubicado a la izquierda del vértice.

FORMULARIO DE CALCULO DIFERENCIAL

TEOREMAS DE LÍMITES.

Si a y k son números reales, m y n son enteros positivos y el límite de $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a} g(x)$ existen.

1. $\lim_{x\to a} k = k$.
2. $\lim_{x\to a} x = a$.
3. $\lim_{x\to a}\left[kf(x)\right] = k\lim_{x\to a} f(x)$.
4. $\lim_{x\to a}\left[f(x)+g(x)\right] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$.
5. $\lim_{x\to a}\left[f(x)-g(x)\right] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$.
6. $\lim_{x\to a}\left[f(x)g(x)\right] = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]\left[\lim_{x\to a} g(x)\right]$.
7. $\lim_{x\to a}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$; siempre y cuando $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$.
8. $\lim_{x\to a}\left[f(x)\right]^n = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n$.
9. $\lim_{x\to a}\sqrt[m]{f(x)} = \sqrt[m]{\lim_{x\to a} f(x)}$; si $m-par$ $\lim_{x\to a} f(x) \geq 0$.

Limites laterales.

10. $\lim_{x\to a} f(x) = L$; si $\lim_{x\to a^-} f(x) = L = \lim_{x\to a^+} f(x)$.

Limites que tiende a infinito.

11. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$
12. $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$

COMPORTAMIENTO ASÍNTOTICO.

Asíntota vertical.

La recta $x = a$ es una asíntota vertical de la gráfica de la función f si al menos uno de los siguientes enunciados es verdadero.

i) $\lim_{x\to a^+} f(x)=\infty$. ii) $\lim_{x\to a^+} f(x)=-\infty$. iii) $\lim_{x\to a^-} f(x)=\infty$. iv) $\lim_{x\to a^-} f(x)=-\infty$.

Asíntota horizontal.

La recta $y=L$ es una <u>asíntota horizontal</u> de la gráfica de la función f si al menos una de las proposiciones siguientes es verdadera.

i) $\lim_{x\to\infty} f(x)=L$, y para algún número N , si $x>N$, entonces $f(x)\neq L$.

ii) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=L$, y para algún número N , si $x<N$, entonces $f(x)\neq L$.

DEFINICIÓN DE CONTINUIDAD.

Para funciones de un solo intervalo.

1. $f(a)$ definido.
2. $\lim_{x\to a} f(x)=L$.
3. $f(a)=\lim_{x\to a} f(x)$

DERIVADA POR DEFINICIÓN.

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

FÓRMULAS DE DERIVADAS.

DERIVADAS ALGEBRAICAS.

1. $\frac{d[c]}{dx}=0$; donde c es una función constante.
2. $\frac{d[x]}{dx}=1$; $\left(\frac{d[y]}{dy}=1,\frac{d[t]}{dt}=1, etc.\right)$.
3. $\frac{d[(f\pm g)(x)]}{dx}=\frac{d[f(x)]}{dx}\pm\frac{d[g(x)]}{dx}$.
4. $\frac{d[cf(x)]}{dx}=c\frac{d[f(x)]}{dx}$.

u y w son funciones que dependen de x .

5. $\frac{d[uv]}{dx}=u\frac{d[v]}{dx}+v\frac{d[u]}{d}$.
6. $\frac{d[u^n]}{dx}=n\,u^{n-1}\frac{d[u]}{dx}$.
7. $\frac{d\left[\frac{u}{v}\right]}{dx}=\frac{v\frac{d[u]}{dx}-u\frac{d[v]}{dx}}{v^2}$.

DERIVADAS LOGARITMICAS.

8. $\frac{d[\ln u]}{dx}=\frac{1}{u}\frac{d[u]}{dx}$.
9. $\frac{d[\log_b u]}{dx}=\frac{1}{u\ln b}\frac{d[u]}{dx}$.

DERIVADAS EXPONENCIALES.

10. $\frac{d\left[e^{u}\right]}{dx}=e^{u}\frac{d[u]}{dx}$.

11. $\frac{d\left[a^{u}\right]}{dx}=a^{u}\ln a\frac{d[u]}{dx}$.

DERIVADAS TRIGONOMETRICAS.

12. $\frac{d[\operatorname{sen} u]}{dx}=\cos u\frac{d[u]}{dx}$.

13. $\frac{d[\cos u]}{dx}=-\operatorname{sen} u\frac{d[u]}{dx}$.

14. $\frac{d[\tan u]}{dx}=\sec^{2} u\frac{d[u]}{dx}$.

15. $\frac{d[\cot u]}{dx}=-\csc^{2} u\frac{d[u]}{dx}$.

16. $\frac{d[\sec u]}{dx}=\sec u\tan u\frac{d[u]}{dx}$.

17. $\frac{d[\csc u]}{dx}=-\csc u\cot u\frac{d[u]}{dx}$.

DERIVADAS TRIGONOMETRICAS INVERSAS.

18. $\frac{d[\operatorname{arc\,sen} u]}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-u^{2}}}\frac{d[u]}{dx}$.

19. $\frac{d[\operatorname{arc\,cos} u]}{dx}=-\frac{1}{\sqrt{1-u^{2}}}\frac{d[u]}{dx}$.

20. $\frac{d[\operatorname{arc\,tan} u]}{dx}=\frac{1}{1+u^{2}}\frac{d[u]}{dx}$.

21. $\frac{d[\operatorname{arc\,cot} u]}{dx}=-\frac{1}{1+u^{2}}\frac{d[u]}{dx}$.

22. $\frac{d[\operatorname{arc\,sec} u]}{dx}=\frac{1}{u\sqrt{u^{2}-1}}\frac{d[u]}{dx}$.

23. $\frac{d[\operatorname{arc\,csc} u]}{dx}=-\frac{1}{u\sqrt{u^{2}-1}}\frac{d[u]}{dx}$.

DIFERENCIAL DE UNA FUNCIÓN. $df(x)=f'(x)dx$.

EVALUACIÓN DE LA DIFERENCIAL. $df(x_0,\Delta x_0)=f'(x_0)dx_0$; donde $\Delta x_0=dx_0$.

APROXIMACIÓN LINEAL. $f(x_0+\Delta x_0)\approx f(x_0)+df(x_0,\Delta x_0)$

ESTIMACIÓN DE ERRORES:

Error relativo: $ER=\frac{df(x)}{f(x)}$

Error porcentual: $\%E=100(ER)$

FORMULARIO CÁLCULO INTEGRAL

Nota: Considera a u como una función que depende de la variable x: $f(x)=u$ y $g(x)=v$; k y C son constantes.

1. $\int du = u + c$.
2. $\int k u\, du = k\int u\, du$.
3. $\int (u \pm v)\, dx = \int u\, dx \pm \int v\, dx$.
4. $\int u^n du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + c$, donde $n \neq -1$.
5. $\int \dfrac{1}{u} du = ln|u| + c$.
6. $\int e^u du = e^u + c$.
7. $\int a^u du = \dfrac{a^u}{ln\, a} + c$.
8. $\int sen\, u\, du = -cos\, u + c$.
9. $\int cos\, u\, du = sen\, u + c$.
10. $\int tan\, u\, du = ln|sec\, u| + c$.
11. $\int cot\, u\, du = ln|sen\, u| + c$.
12. $\int sec\, u\, tan\, u\, du = sec\, u + c$.
13. $\int csc\, u\, cot\, u\, du = -csc\, u + c$.
14. $\int sec\, u\, du = ln|sec\, u + tan\, u| + c$.
15. $\int csc\, u\, du = ln|csc\, u - cot\, u| + c$.
16. $\int sec^2 u\, du = tan\, u + c$.
17. $\int csc^2 u\, du = -cot\, u + c$.
18. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = arc\, sen \dfrac{u}{a} + c$.
19. $\int \dfrac{du}{a^2 + u^2} = \dfrac{1}{a} arc\, tan \dfrac{u}{a} + c$.
20. $\int \dfrac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \dfrac{1}{a} arc\, sec \dfrac{u}{a} + c$.

INTEGRACIÓN POR PARTES. $\int u\, dv = uv - \int v\, du$.

INTEGRAL DEFINIDA. $\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$.

FORMULARIO DE SUMATORIAS

PROPIEDADES DE SUMATORIAS

1. $\sum_{i=1}^{n} ca_i = c\sum_{i=1}^{n} a_i$, en donde c es una constante cualquiera.

2. $\sum_{i=1}^{n}(a_i \pm b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \pm \sum_{i=1}^{n} b_i$

3. $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{m} a_i + \sum_{i=m+1}^{n} a_i \quad m < n$

FORMULAS DE SUMATORIAS.

1. $\sum_{i=1}^{n} c = cn$.

2. $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

3. $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

4. $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

5. $\sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}$

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

PARTE 1.

Si la función G está definida por: $G(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Para toda x en $[a,b]$, entonces G es una antiderivada de f en $[a,b]$.

PARTE 2.

Si F es cualquier antiderivada de f en $[a,b]$, entonces: $\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$

TECNOLÓGICO DE MONTERREY

MATEMÁTICAS II **MA1005** Prof. Dr. Óscar Fuentes Mariles

Tarea No. 2 *anticipada* ☐ *a tiempo* ☐ *fuera de tiempo* ☐

*Nombre:*__________________________________ *Matrícula:*_________
*Nombre:*__________________________________ *Matrícula:*_________
*Nombre:*__________________________________ *Matrícula:*_________
*Número de ejercicios resueltos correctamente/número de ejercicios C=*__________
*Ejercicios que le(s) gustaría que se resolvieran en clase:*________________

falta

INTEGRAL INDEFINIDA POR PARTES

1. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x}[\ln(x) - 2] + C$
2. $\int x e^{-x} dx = -e^{-x}(x+1) + C$
3. $\int (\ln x)^2 dx = x[(\ln x)^2 - 2\ln x + 2] + C$
4. $\int \frac{x+1}{e^x} dx = -e^{-x}(x+2) + C$
5. $\int e^x \cos x\, dx = \frac{1}{2} e^x(\cos x + sen\, x) + C$
6. $\int x \cos x\, dx = x\, sen\, x + \cos x + C$
7. $\int x^3 \ln x\, dx = \frac{1}{4} x^4[\ln(x) - \frac{1}{4}] + C$
8. $\int \ln(4x) dx = x[\ln(4x) - 1] + C$
9. $\int \sqrt{x} \ln(x^2) dx = \frac{2}{3} x^{3/2} \ln(x^2) - \frac{8}{9} x^{3/2} + C$
10. $\int x\sqrt{x+1}\, dx = \frac{2x}{3}(x+1)^{3/2} - \frac{4}{15}(x+1)^{5/2} + C$
11. $\int \frac{x}{(2x+1)^2} dx = -\frac{x}{2(2x+1)} + \frac{1}{4}\ln|2x+1| + C$
12. $\int (2x-1)\ln(x-1) dx = x(x-1)\ln(x-1) - \frac{x^2}{2} + C$
13. $\int x^2 e^x dx = e^x(x^2 - 2x + 2) + C$
14. $\int (e^{-x} - x)^2 dx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}e^{-2x} + 2xe^{-x} + e^{-x} + C$
15. $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx = -\sqrt{1-e^{2x}} + C$
16. $\int sen[\ln x] dx = \frac{1}{2} x[sen(\ln x) - \cos(\ln x)] + C$
17. $\int x^2 e^{-x} dx = -e^{-x}(\frac{1}{3}x^3 + 2x + 2) + C$
18. $\int_1^2 x \ln x\, dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4}\right]_1^2 = 2\ln 2 - \frac{3}{4}$
19. $\int (2^x + x)^2 dx = \frac{2^{2x-1}}{\ln 2} + \frac{2^{x+1} x}{\ln 2} - \frac{2^{x+1}}{\ln^2 2} + \frac{x^3}{3} + C$

falta

$\ln x = y$ $\int y^2 e^y dy$

$e^y = x$

$\frac{dx}{dy} = e^y$

$dx = e^y dy$

UNIVERSIDAD AUTONOMA DEL ESTADO DE MÉXICO

Preparatoria Texcoco

Academia de Matemáticas

Serie 3 de Temas Selectos

Resolver las integrales indefinidas

1) $\int \frac{dx}{Sen^2 7x}$

2) $\int Cot(5x-7)\,dx$

3) $\int \frac{sen\,2x\;dx}{(1+\cos 2x)^2}$

4) $\int \frac{Tan^3 x}{Cos^2 x}\,dx$

5) $\int \frac{Cos3x+3}{Sen3x}\,dx$

6) $\int (Tan2x - Sec2x)\,dx$

7) $\int t^2 Cos(1-t^3)\,dt$

8) $\int Csc^2 3\theta\,d\theta$

9) $\int e^x Sen(e^x)\,dx$

10) $\int \frac{Cos(Lnx)}{x}\,dx$

11) $\int \frac{dx}{25+x^2}$

12) $\int \frac{dx}{4x\sqrt{x^2-16}}$

13) $\int \frac{dx}{4-9x^2}$

14) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-5x^2}}$

15) $\int \frac{Cosx\,dx}{16+Sen^2 x}$

16) $\int \frac{x^2\,dx}{5-x^6}$

17) $\int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt{1-e^{4x}}}$

18) $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$

19) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x+x^2}}$

20) $\int \frac{dx}{x^2+3x+1}$

21) $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x-x^2}}$

22) $\int \frac{(x+2)dx}{\sqrt{4x-x^2}}$

23) $\int \frac{3x-1}{x^2-x+1}\,dx = \int \frac{2x-1+x}{x^2-x+1}\,dx$

24) $\int \frac{(x+3)\,dx}{\sqrt{4x^2+4x+3}}$

25) $\int (1+Csc4x)^2\,dx$

26) $\int \frac{dy}{1+\cos y}$

$\int \frac{(2x-1)dx}{x^2-x+1} + \int \frac{x}{x^2-x+1}$

$u = x^2 - x + 1$

$du = (2x-1)dx$

SOLUCIONES

1) $-\frac{1}{7}Cot(7x)+C$

2) $\frac{1}{5}Ln|Sen(5x-7)|+C$

3) $\frac{1}{2(1+Cos2x)}+C$

4) $\frac{Tan^4x}{4}+C$

5) $\frac{1}{3}Ln|Sen3x|+Ln|Csc3x-Cot3x|+C$

6) $-\frac{1}{2}Ln|Cos2x|-\frac{1}{2}Ln|Sec2x+Tan2x|+C$

7) $-\frac{Sen(1-t^3)}{3}+C$

8) $-\frac{1}{3}Cot3\theta+C$

9) $-Cos(e^x)+C$

10) $Sen(Lnx)+C$

11) $\frac{1}{5}\arctan\frac{x}{5}+C$

12) $\frac{1}{16}arc\sec\frac{x}{4}+C$

13) $\frac{1}{12}Ln\left|\frac{2+3x}{2-3x}\right|+C$

14) $\frac{1}{\sqrt{5}}arcsen\frac{\sqrt{15}}{3}x+C$

15) $\frac{1}{4}\arctan\left(\frac{Senx}{4}\right)+C$

16) $\frac{1}{6\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}+x^3}{\sqrt{5}-x^3}\right|+C$

17) $\frac{1}{2}arcsen(e^{2x})+C$

18) $\frac{1}{2}\arctan\frac{x+1}{2}+C$

19) $\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{1+x+x^2}\right|+C$

20) $\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2x+3-\sqrt{5}}{2x+3+\sqrt{5}}\right|+C$

21) $arcsen\left(\frac{2x+3}{\sqrt{17}}\right)+C$

22) $-\sqrt{4x-x^2}+4arcsen\left(\frac{x-2}{2}\right)+C$

23) $\frac{3}{2}\ln|x^2-x+1|+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+C$

24)

$\frac{1}{4}\sqrt{4x^2+4x+3}+\frac{5}{4}\ln\left|2x+1+\sqrt{4x^2+4x+3}\right|+C$

25) $x+\frac{1}{2}Ln|\csc 4x-\cot 4x|-\frac{1}{4}\cot 4x+C$

26) $\csc y-\cot y+C$

Prof. Jesús Flores Carmona

20. $\int \frac{\ln(x+1)}{2(x+1)}dx = \frac{1}{4}\ln|x+1|\ln|x+1| + C$

3. ECUACIONES DIFERENCIALES

21. $(1+x^2)dy - 2xydx = 0$ Sol. $y = C(1+x^2)$

22. $y^2dx + x^2dy = 0$ Sol. $y = \frac{x}{Cx-1}$

23 $(1+y)dx - (5+x)dy = 0$ Sol. $y = C(5+x)+1$

24. $(x+1)y' - \frac{x}{y} = 0$ Sol. $y^2 = 2(x - \ln|x+1+C)|$

25. $y' - x^4 - 2x = 6$ Sol. $y = \frac{1}{5}x^5 + x^2 + 6x + C$

26. $\frac{dy}{dx} = \frac{5x}{5x^2+10}$ Sol. $y = \frac{1}{2}\ln(5x^2+10) + C$

27. $\frac{d^2y}{dx^2} = e^x$ Sol. $y = e^x + C_1x + C_2$

28. $\cos x \cos y\, dx + senx\, seny\, dy = 0$ Sol. $\cos x = Cseny$

29. $2(y+3)dx - xydy = 0$ Sol. $y = 2\ln x + 3\ln(y+3) + C$

30. $y' = x^3y^3$ Sol. $y = -\frac{2}{x^2+C}$

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales sujetas a las condiciones dadas

31. $x^2y' = -\frac{1}{y^2}$; $y(1) = 2$ Sol. $y^3 = \frac{3}{x} + 5$

32. $y' = e^{x-y}$; $y(0) = 0$ Sol. $y = x$

33. $e^y y' - x^2 = 0$; $y = 0$ cuando $x = 0$ Sol. $y = \ln\frac{x^3+3}{3}$

34. $(4x^2+3)^2y' - 4xy^2 = 0$; $y(1) = 3/2$ Sol. $y = \frac{4x^2+3}{2(x^2+1)}$

35. $2\frac{dy}{dx} = \frac{xe^{-y}}{\sqrt{x^2+3}}$; $y(1) = 0$ Sol. $y = \ln\left(\frac{1}{2}\sqrt{x^2+3}\right)$

Prof. Jesús V... Cálculo

25. $\int \frac{xe^{x^2}\,dx}{e^{x^2}+2} = \frac{1}{2}\ln\left|e^{x^2}+2\right| + C$ ✓

26. $\int x\,sen 3x^2 dx = -\frac{1}{6}\cos 3x^2 + C$ ✓

27. $\int \cos(3x-1)\,dx = \frac{1}{3}sen(3x-1) + C$ ✓

28. $\int 3\cot(2x-1)\,dx = \frac{3}{2}\ln\left|sen(2x-1)\right| + C$ ✓

29. $\int 3x\sec 2x^2 dx = \frac{3}{4}\ln\left|\sec 2x^2 + \tan 2x^2\right| + C$ ✓

30. $\int 4x^3\csc 2x^4 dx = \frac{1}{2}\ln\left|\csc 2x^4 - \cot 2x^4\right| + C$ ✓

31. $\int 12x^3\csc^2(x^4+5)\,dx = -3\cot(x^4+5) + C$ ✓

32. $\int e^{5x}\sec^2 e^{5x} dx = \frac{1}{5}\tan e^{5x} + C$ ✓

33. $\int 6e^{3x} dx = 2e^{3x} + C$ ✓

34. $\int 4x^4 e^{2x^5} = \frac{2}{5}e^{2x^5} + C$ ✓

35. $\int e^{sen 2x}\cos 2x\,dx = \frac{1}{2}e^{sen 2x} + C$ ✓

36. $\int e^{\tan 4x}\sec^2 4x\,dx = \frac{1}{4}e^{\tan 4x} + C$ ✓

37. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+9}} = \frac{1}{2}\ln\left|2x+\sqrt{4x^2+9}\right| + C$ ✓

38. $\int \frac{6x\,dx}{\sqrt{1-4x^4}} = \frac{3}{2}arc\,sen\,2x^2 + C$ ✓

39. $\int \frac{3x\,dx}{x^4+36} = \frac{1}{4}arc\tan\frac{x^2}{6} + C$ ✓

40. $\int \frac{6x^2 dx}{16x^6-4} = \frac{1}{8}\ln\left|\frac{4x^3-2}{4x^3+2}\right| + C$ ☆

III. INTEGRACIÓN POR PARTES

1. $\int 8x^3\ln x^2 dx = 2x^4\ln x^2 - x^4 + C$ ✓

2. $\int 6x^5\ln x^3 dx = x^6\ln x^3 - \frac{1}{2}x^6 + C$ ✓

3. $\int 2\ln x\,dx = 2x\ln x - 2x + C$ ✓

4. $\int 4\ln 2x^4 dx = 4x\ln 2x^4 - 16x + C$ ✓

5. $\int 4xe^{2x} dx = 2xe^{2x} - e^{2x} + C$ ✓

6. $\int 3xe^{-3x} dx = -xe^{-3x} - \frac{1}{3}e^{-3x} + C$ ✓

IV. INTEGRACION POR FRACCIÓNES PARCIALES.

1. $\int \frac{x\,dx}{(x+2)(x+3)} = 3\ln|x+3| - 2\ln|x+2| + C$

2. $\int \frac{(5x-2)\,dx}{(x+2)(x-2)} = 2\ln|x-2| + 3\ln|x+2| + C$

3. $\int \frac{(7x+1)\,dx}{x^2+x-6} = 4\ln|x+3| + 3\ln|x-2| + C$

4. $\int \frac{(2x^2+1)\,dx}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{3}{2}\ln|x-1| - 9\ln|x-2| + \frac{19}{2}\ln|x-3| + C$

5. $\int \frac{(x^4-4x^2+x+1)\,dx}{x^2-4} = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{4}\ln|x+2| + \frac{3}{4}\ln|x-2| + C$